《信号与系统》

第6章 z变换与离散时间系统的z域分析

吉小鹏

E-mail: 003163@nuist.edu.cn

南京信息工程大学 电子与信息工程学院 尚贤楼207




本章讨论z变换的定义、性质以及它与拉普拉斯变换、傅里叶变换的联系，进而研究离散时间系统的z域分析、离散时间系统的系统函数与频率响应。

提纲

6.1 引言

z 变换将离散系统的数学模型——差分方程转换为简单的代数方程，简化求解过程。

z 变换在离散系统中的作用类似于连续系统中的拉普拉斯变换。

连续因果信号 $x(t)$ 经均匀冲击抽样，得到抽样信号 $x_s(t)$ ：

$$x_s(t) = x(t)\delta_T(t)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)$$

取单边拉普拉斯变换：

$$X_s(s) = \int_0^{\infty} x_s(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty}\left[\sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)\right]e^{-st}dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-snT}$$

$z = e^{sT}$ $\qquad X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n}$ $\qquad T=1$ $\qquad X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$

6.2 z变换定义、典型序列的z变换

z变换的定义

序列 $x(n)$ 的双边 z 变换：

$$X(z)=\mathscr{Z}[x(n)]$$

$$=\cdots+x(-2)z^{2}+x(-1)z^{1}+x(0)z^{0}+x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+\cdots$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n} \qquad z=\mathrm{Re}(z)+j\,\mathrm{Im}(z)$$

z 变换的收敛域

序列 $x(n)$ 的单边 z 变换：

$$X(z)=\mathscr{Z}[x(n)u(n)]$$

$$=x(0)z^{0}+x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

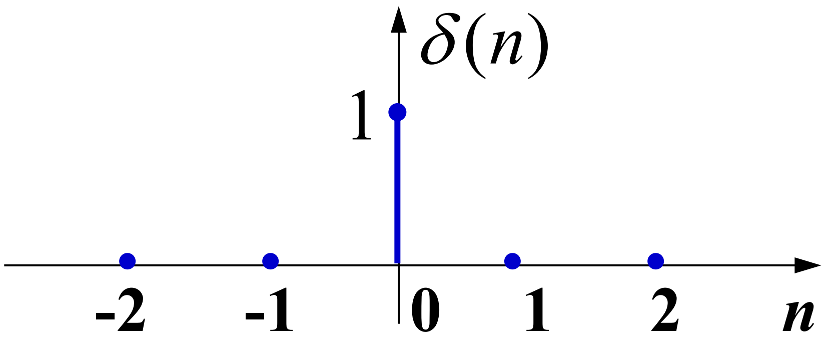
z 变换的收敛域

典型序列的z变换

- **单位样值序列** $\delta(n)$

$$X(z)=\mathscr{Z}[\delta(n)]=1$$

收敛域：整个z平面

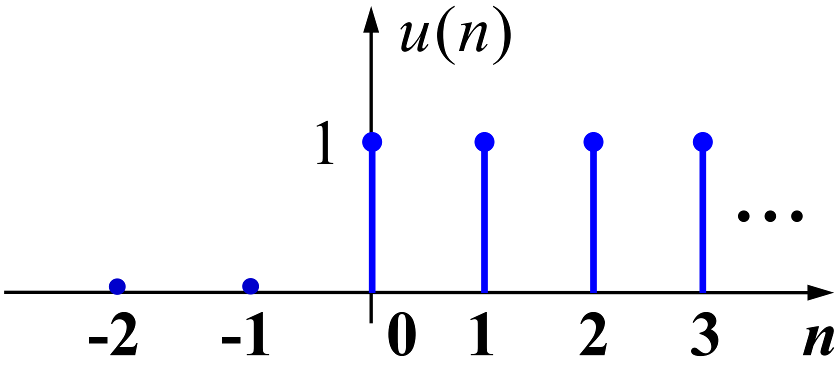


- **单位阶跃序列** $u(n)$

$$X(z)=\mathscr{Z}[u(n)]=\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}=\frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$=\frac{z}{z-1}$$

收敛域： $|z|>1$



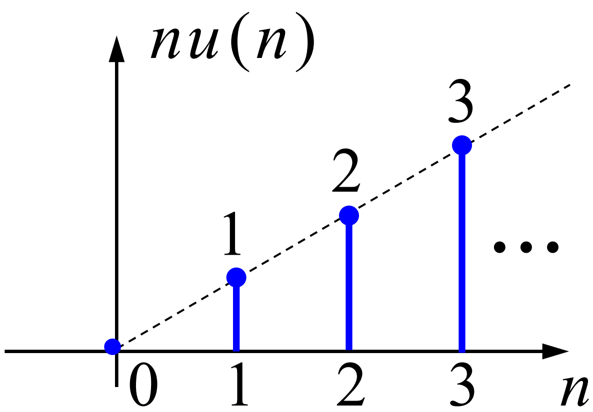
6.2 z变换定义、典型序列的z变换

■ 典型序列的z变换

- **斜变序列** $nu(n)$

$$X(z)=\mathscr{Z}[nu(n)]=\frac{z}{(z-1)^2}$$

收敛域：$|z|>1$



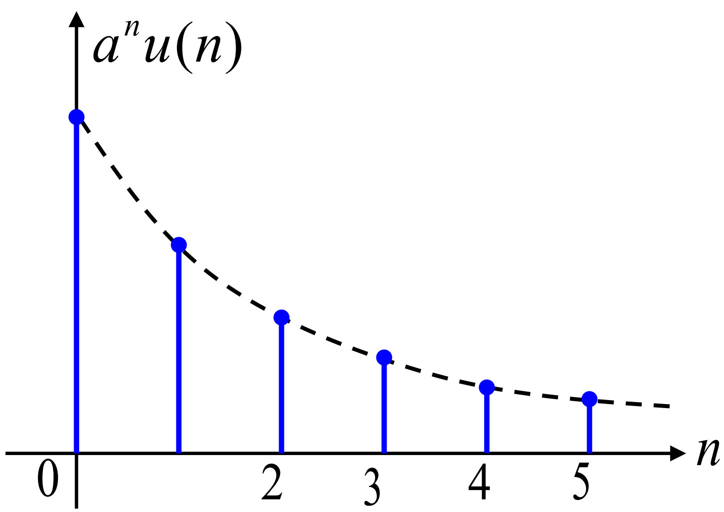
- **指数序列** $a^n u(n)$

$$X(z)=\mathscr{Z}[a^n u(n)]=\sum_{n=0}^{\infty}a^n z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}(az^{-1})^n$$

$$=\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a}$$

收敛域：$|z|>|a|$

$$\mathscr{Z}[e^{bn}u(n)]=\frac{z}{z-e^b}\qquad |z|>|e^b|$$



6.2 z变换定义、典型序列的z变换

典型序列的z变换

- 单边余弦序列 $\cos(\omega_0 n)u(n)$

$$X(z)=\mathscr{Z}[\cos(\omega_0 n)u(n)]=\frac{1}{2}\left[\frac{z}{z-e^{j\omega_0}}+\frac{z}{z-e^{-j\omega_0}}\right]=\frac{z(z-\cos\omega_0)}{z^2-2z\cos\omega_0+1}$$

收敛域：$|z|>1$

$$\mathscr{Z}[\cos(\omega_0 n)u(n)]=\frac{z(z-\cos\omega_0)}{z^2-2z\cos\omega_0+1}\qquad |z|>1$$

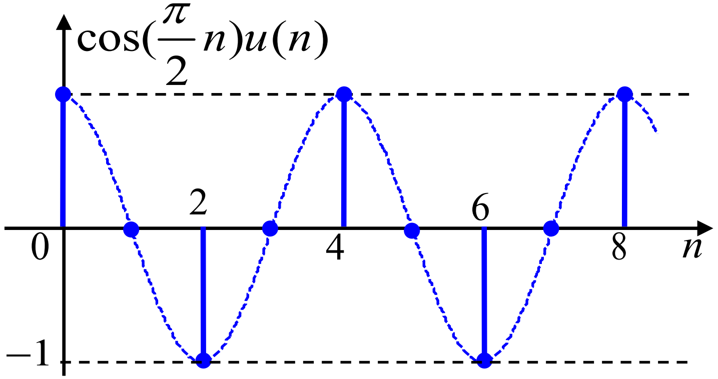
$$\mathscr{Z}[\sin(\omega_0 n)u(n)]=\frac{z\sin\omega_0}{z^2-2z\cos\omega_0+1}\qquad |z|>1$$

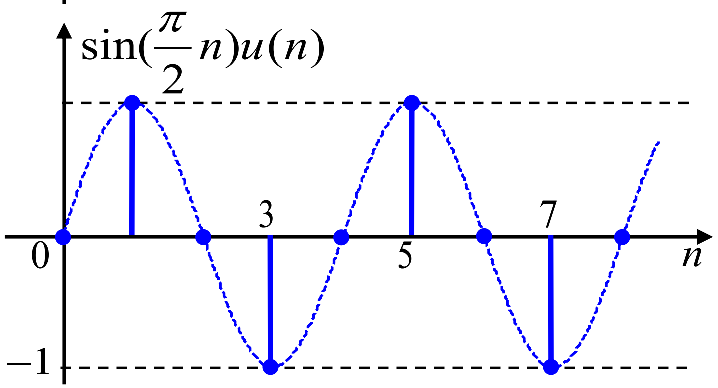
$$\cos(\frac{\pi}{2}n)u(n)\ \rightarrow\ \frac{z^2}{z^2+1},|z|>1$$

$\{1,0,-1,0,1,0,\cdots\}$

$$\sin(\frac{\pi}{2}n)u(n)\ \rightarrow\ \frac{z}{z^2+1},|z|>1$$

$\{0,1,0,-1,0,1,\cdots\}$





z变换的收敛域

$$\mathscr{Z}[a^n u(n)] = \frac{z}{z-a}, |z| > |a|$$

$$\mathscr{Z}[-a^n u(-n-1)] = \frac{z}{z-a}, |z| < |a|$$

$x(n) \leftrightarrow X(z)$, 收敛域

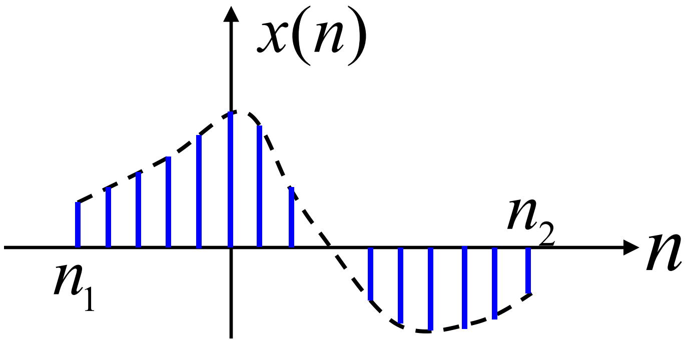
下面讨论各种类型序列的z变换的收敛域。

6.3 z变换的收敛域

z变换的收敛域

- **有限长序列**

序列仅在有限的区间 $(n_1 \le n \le n_2)$ 具有**非零的有限值**。



$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x(n) z^{-n}$$

(1) $n_1 < 0, n_2 > 0$

收敛域：$0 < |z| < \infty$

例：$x(n) = \{1, \quad 2, \quad \underset{\uparrow}{3}, \quad 2, \quad 3\}$，$X(z) = z^2 + 2z + 3 + \dfrac{2}{z} + \dfrac{3}{z^2}$

(2) $n_2 \le 0$

收敛域：$|z| < \infty$

(3) $n_1 \ge 0$

收敛域：$|z| > 0$

6.3 z变换的收敛域

z变换的收敛域

- 右边序列

$$x(n)=x(n)u(n-n_1)$$

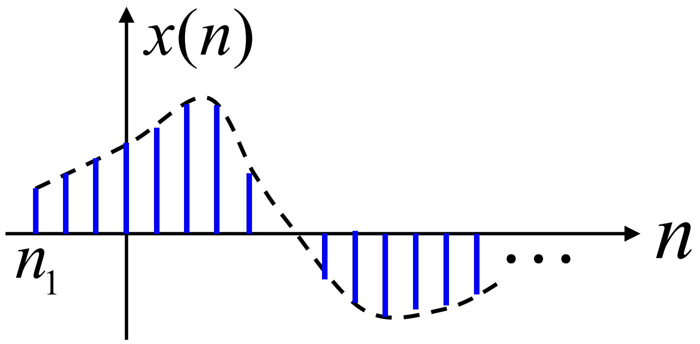
$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

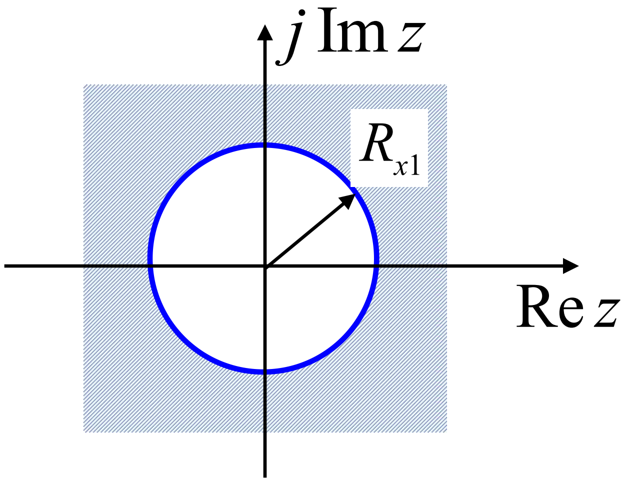
(1) $n_1 \ge 0$

收敛域：$|z|>R_{x_1}$

(2) $n_1<0$

收敛域：$R_{x1}<|z|<\infty$





z变换的收敛域

- 左边序列

$$x(n)=x(n)u(n_2-n)$$

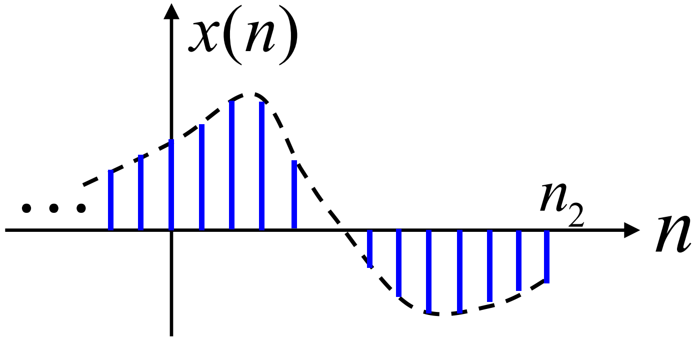
$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{n_2}x(n)z^{-n}$$

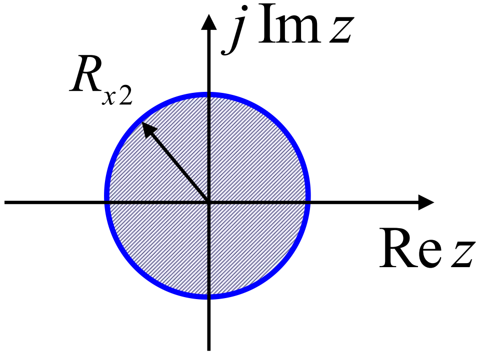
(1) $n_2\le 0$

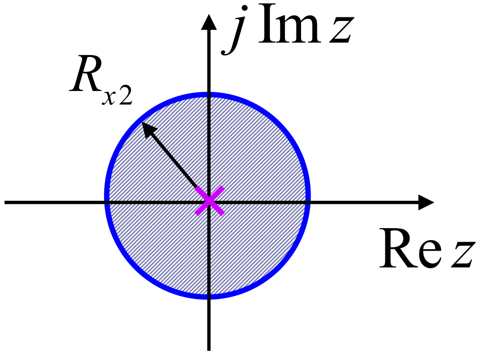
收敛域：$|z|<R_{x_2}$

(2) $n_2>0$

收敛域：$0<|z|<R_{x_2}$





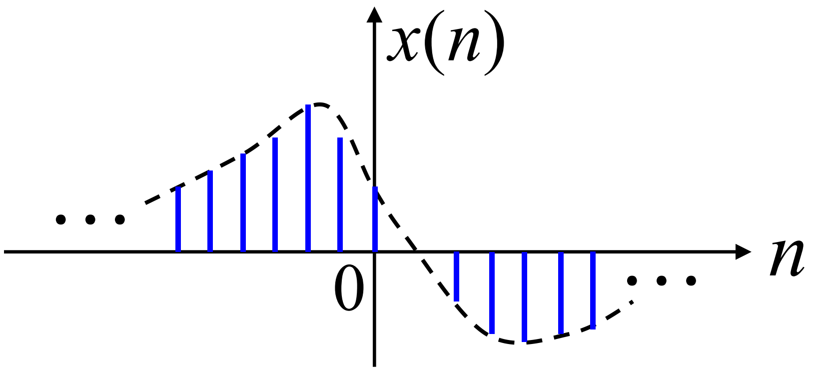


■ z变换的收敛域

- 双边序列

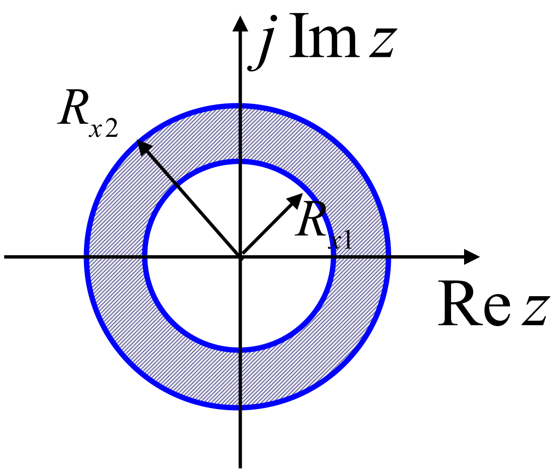
$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

$$=\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1}x(n)z^{-n}}_{|z|<R_{x2}}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}}_{|z|>R_{x1}}$$



若 $R_{x2}>R_{x1}$，$X(z)$ 收敛域：

$$R_{x1}<|z|<R_{x2}$$



若 $R_{x2}<R_{x1}$，$X(z)$ 不收敛。

6.3 z变换的收敛域

■ z变换的收敛域

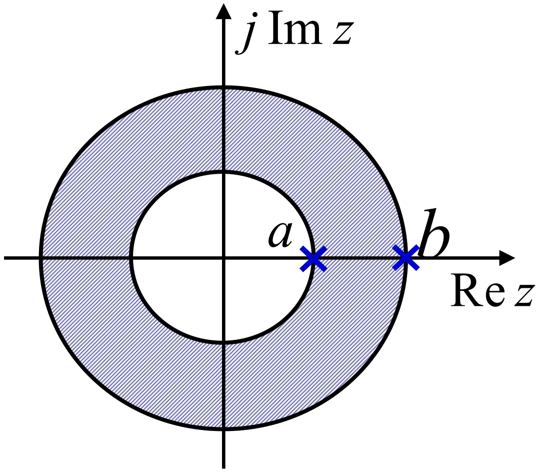
例：已知 $x(n)=a^n u(n)-b^n u(-n-1)$，求 $X(z)$ 并确定收敛域，其中 $b>a>0$。

解：

$$X(z)=\mathscr{Z}[x(n)]$$

$$=\mathscr{Z}[a^n u(n)]+\mathscr{Z}[-b^n u(-n-1)]$$

$$=\frac{z}{z-a}+\frac{z}{z-b}\quad (a<|z|<b)$$



由于 $X(z)$ 在收敛域内是解析的，因此收敛域内不应该包含任何极点。

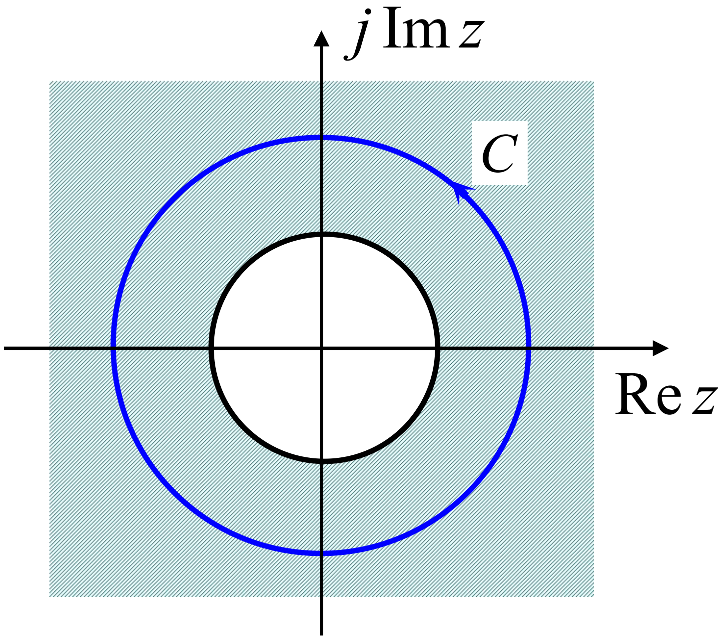
通常，$X(z)$ 的收敛域以极点为边界。对于多个极点的情况，右边序列之收敛域是从 $X(z)$ 最外面有限极点延伸至 $z\to\infty$（可能包含 ∞）；左边序列之收敛域是从 $X(z)$ 最里面非零极点延伸至 $z=0$（可能包含 0）。

6.5 逆z变换

$$X(z)=\mathscr{Z}[x(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

$$x(n)=\mathscr{Z}^{-1}[X(z)]$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz$$



C 是位于 $X(z)$ 收敛域之内的围绕坐标原点的逆时针的闭合积分路线。

逆z变换方法：

- **围线积分法（留数法）**
- 部分分式展开法（仅适用于 $X(z)$ 为有理分式的情况）
- **幂级数展开法**

6.5 逆z变换

- **部分分式展开法**

$$\mathcal{Z}[a^n u(n)] = \frac{z}{z-a}, |z| > |a|$$

$$\mathcal{Z}[-a^n u(-n-1)] = \frac{z}{z-a}, |z| < |a|$$

$$\frac{X(z)}{z} = \sum_m \frac{A_m}{z - z_m} \quad \Longrightarrow \quad X(z) = \sum_m \frac{A_m z}{z - z_m}$$

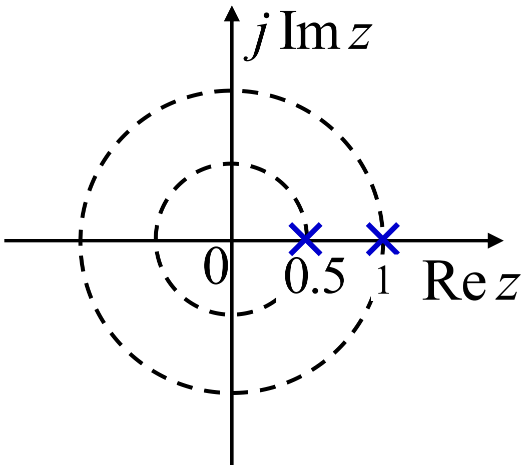
■ **部分分式展开法**

例：讨论 $X(z)=\dfrac{z^2}{z^2-1.5z+0.5}$ 可能的收敛域，并求对应的序列。

解：

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{z}{z^2-1.5z+0.5}=\frac{2}{z-1}-\frac{1}{z-0.5}$$

$$X(z)=\frac{2z}{z-1}-\frac{z}{z-0.5}$$

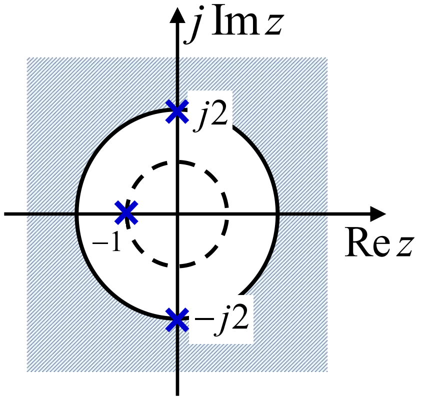


(1) $|z|>1$ $\quad x(n)=(2-0.5^n)u(n)$

(2) $0.5<|z|<1$ $\quad x(n)=-2u(-n-1)-0.5^n u(n)$

(3) $|z|<0.5$ $\quad x(n)=(-2+0.5^n)u(-n-1)$

部分分式展开法



例：已知 $X(z)=\dfrac{z^3+6}{(z+1)(z^2+4)},|z|>2$ ，求 $x(n)$ 。

解： 极点：$p_1=-1,p_{2,3}=\pm j2$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{z^3+6}{z(z+1)(z^2+4)}\quad=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}+\frac{1+j2}{4}\cdot\frac{1}{z-j2}+\frac{1-j2}{4}\cdot\frac{1}{z+j2}$$

$$X(z)=\frac{3}{2}-\frac{z}{z+1}+\frac{1+j2}{4}\cdot\frac{z}{z-j2}+\frac{1-j2}{4}\cdot\frac{z}{z+j2}$$

$$x(n)=\frac{3}{2}\delta(n)-(-1)^n u(n)+\left[\frac{1+j2}{4}(2e^{j\frac{\pi}{2}})^n+\frac{1-j2}{4}(2e^{-j\frac{\pi}{2}})^n\right]u(n)$$

$$=\frac{3}{2}\delta(n)-(-1)^n u(n)+2^n\left[\frac{1}{2}\cos(\frac{n\pi}{2})-\sin(\frac{n\pi}{2})\right]u(n)$$

- 常用z变换对

$X(z)$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$ ，右序列	$\lvert z\rvert<\lvert a\rvert$ ，左序列
$\dfrac{z}{z-a}$	$a^n u(n)$	$-a^n u(-n-1)$
$\dfrac{z^2}{(z-a)^2}$	$(n+1)a^n u(n)$	$-(n+1)a^n u(-n-1)$
$\dfrac{z}{(z-a)^2}$	$na^{n-1}u(n)$	$-na^{n-1}u(-n-1)$
$\dfrac{z}{z-1}$	$u(n)$	$-u(-n-1)$
$\dfrac{z}{(z-1)^2}$	$nu(n)$	$-nu(-n-1)$

幂级数展开法（长除法）

$$X(z)=\mathscr{Z}[x(n)]=\cdots+x(-2)z^{2}+x(-1)z^{1}+x(0)z^{0}+x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+\cdots$$

基本思想：

将 $X(z)$表示为 z 或 z^{-1} 的幂级数形式，信号 $x(n)$ 的值则可以通过与 z^{-1} 相联系的系数来表示。

只适用于单边信号，即收敛域具有 $|z|>|a|$ 或 $|z|<|a|$ 形式的离散时间信号。

若收敛域是 $|z|>|a|$，则把 $X(z)$ 表示为 z^{-1} 的幂级数形式；

若收敛域是 $|z|<|a|$，则把 $X(z)$ 表示为 z 的幂级数形式。

6.5 逆z变换

- **幂级数展开法**

例：用幂级数展开法求$X(z)=\dfrac{2+z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}},|z|>\dfrac{1}{2}$ 的逆z变换。

解：

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2+2z^{-1}+z^{-2}+\frac{1}{2}z^{-3}+\cdots \\
\hline
1-\frac{1}{2}z^{-1} & 2+z^{-1} \\
 & 2-z^{-1} \\
\cline{2-2}
 & 2z^{-1} \\
 & 2z^{-1}-z^{-2} \\
\cline{2-2}
 & z^{-2} \\
 & z^{-2}-\frac{1}{2}z^{-3} \\
\cline{2-2}
 & \frac{1}{2}z^{-3}
\end{array}
$$

$$X(z)=2+2z^{-1}+z^{-2}+\frac{1}{2}z^{-3}+\cdots$$

$$x(n)=2\delta(n)+2\delta(n-1)+\delta(n-2)+\frac{1}{2}\delta(n-3)+\cdots$$

6.4 z变换的基本性质

z变换的基本性质

- **线性**

$$\mathscr{Z}[ax(n)+by(n)]=a\mathscr{Z}[x(n)]+b\mathscr{Z}[y(n)]$$

- **位移性（时移特性）**

(1) 双边 z 变换的位移特性

若 $\mathscr{Z}[x(n)]=X(z)$,

则 $\mathscr{Z}[x(n-m)]=z^{-m}X(z), \mathscr{Z}[x(n+m)]=z^{m}X(z)$

证明：$\mathscr{Z}[x(n-m)]=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}x(n-m)z^{-n} \overset{k=n-m}{=\!=\!=} \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}x(k)z^{-(k+m)}$

$$=z^{-m}\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)z^{-k}=z^{-m}X(z)$$

例：$u(n) \rightarrow \dfrac{z}{z-1} \qquad u(n-1) \rightarrow \dfrac{1}{z-1}, |z|>1$

6.4 z变换的基本性质

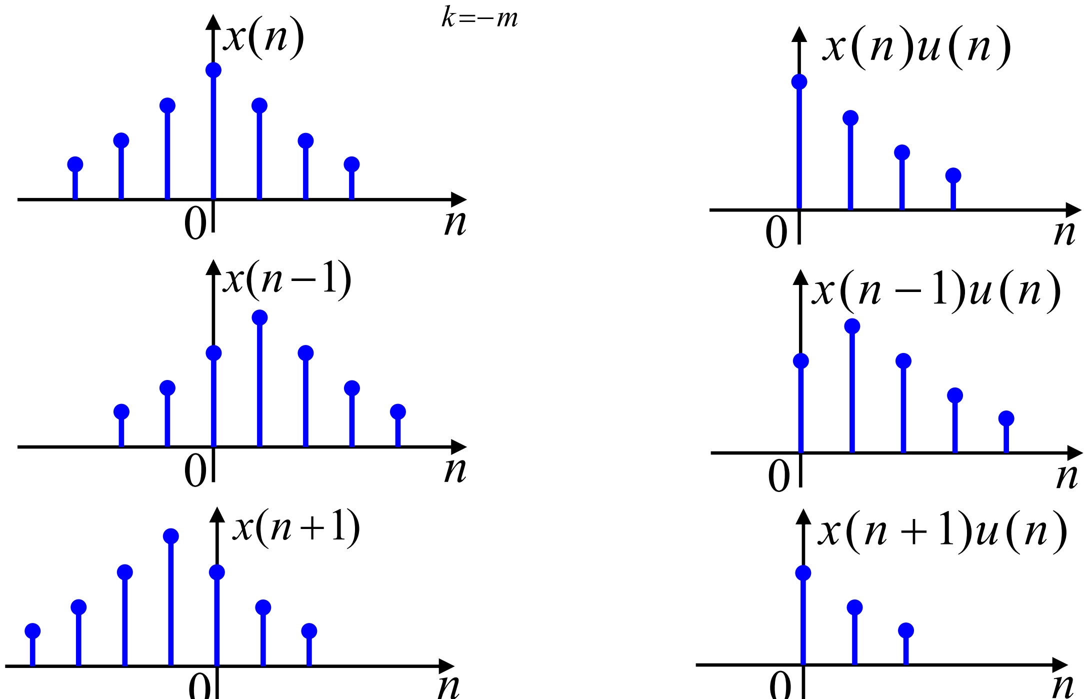
■ z变换的基本性质

- **位移性（时移特性）**

(2) 单边 z 变换的位移特性

若 $\mathscr{Z}[x(n)u(n)]=X(z)$，则

$$\mathscr{Z}[x(n-m)u(n)]=z^{-m}[X(z)+\sum_{k=-m}^{-1}x(k)z^{-k}],\mathscr{Z}[x(n+m)u(n)]=z^{m}[X(z)-\sum_{k=0}^{m-1}x(k)z^{-k}]$$



$$x(n-1)u(n)=x(n-1)u(n-1)+x(-1)\delta(n)$$

$$x(n+1)u(n)=x(n+1)u(n+1)-x(0)\delta(n+1)$$

6.4 z变换的基本性质

z变换的基本性质

- **位移性（时移特性）**

(2) 单边 z 变换的位移特性

$$x(n-1)u(n) = x(n-1)u(n-1) + x(-1)\,\delta(n)$$

$$x(n+1)u(n) = x(n+1)u(n+1) - x(0)\,\delta(n+1)$$

$$x(n-2)u(n) = x(n-2)u(n-2) + x(-2)\,\delta(n) + x(-1)\,\delta(n-1)$$

$$x(n+2)u(n) = x(n+2)u(n+2) - x(0)\,\delta(n+2) - x(1)\,\delta(n+1)$$

若 $\mathscr{Z}[x(n)u(n)] = X(z)$,

则 $\mathscr{Z}[x(n-1)u(n)] = z^{-1}X(z) + x(-1)$

$$\mathscr{Z}[x(n+1)u(n)] = zX(z) - zx(0)$$

$$\mathscr{Z}[x(n-2)u(n)] = z^{-2}X(z) + x(-2) + z^{-1}x(-1)$$

$$\mathscr{Z}[x(n+2)u(n)] = z^{2}X(z) - z^{2}x(0) - zx(1)$$

z变换的基本性质

- **位移性（时移特性）**

(2) 单边 z 变换的位移特性

$$\mathscr{Z}[x(n-m)u(n)] = z^{-m}[X(z) + \sum_{k=-m}^{-1} x(k)z^{-k}]$$

证明：

$$\mathscr{Z}[x(n-m)u(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n-m)z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x(n-m)z^{-(n-m)} \cdot z^{-m} = z^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} x(n-m)z^{-(n-m)}$$

$$\underline{\underline{k=n-m}} \; z^{-m} \sum_{k=-m}^{\infty} x(k)z^{-k} = z^{-m}(\sum_{k=-m}^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty})x(k)z^{-k}$$

$$= z^{-m}(\sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} + \sum_{k=-m}^{-1} x(k)z^{-k})$$

$$= z^{-m}[X(z) + \sum_{k=-m}^{-1} x(k)z^{-k}]$$

z变换的基本性质

- **位移性（时移特性）**

(2) 单边 z 变换的位移特性

$$\mathscr{Z}[x(n+m)u(n)] = z^m[X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k)z^{-k}]$$

证明：

$$\mathscr{Z}[x(n+m)u(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n+m)z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x(n+m)z^{-(n+m)} \cdot z^m \quad = z^m \sum_{n=0}^{\infty} x(n+m)z^{-(n+m)}$$

$$\underline{\underline{k=n+m}} \quad z^m \sum_{k=m}^{\infty} x(k)z^{-k} \quad = z^m(\sum_{k=0}^{\infty} - \sum_{k=0}^{m-1})x(k)z^{-k}$$

$$= z^m(\sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} - \sum_{k=0}^{m-1} x(k)z^{-k})$$

$$= z^m[X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x(k)z^{-k}]$$

z变换的基本性质

- **位移性（时移特性）**

(2) 单边 z 变换的位移特性

例：已知 $y(n)-0.9y(n-1)=0.05u(n), y(-1)=1$, 求 $y(n)$ 。

解：对差分方程两边同时取单边 z 变换，得

$$Y(z)-0.9[z^{-1}Y(z)+y(-1)]=\frac{0.05z}{z-1}$$

$$Y(z)=\frac{0.05z^2}{(z-1)(z-0.9)}+\frac{0.9y(-1)z}{z-0.9}=\frac{0.45z}{z-0.9}+\frac{0.5z}{z-1}$$

$$\therefore y(n)=[0.45\times(0.9)^n+0.5]u(n)$$

z变换的基本性质

- **序列线性加权（z域微分）**

若 $\mathcal{Z}[x(n)] = X(z)$，

则 $\mathcal{Z}[nx(n)] = -z\dfrac{d}{dz}X(z)$

证明：

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)(-n) z^{-n-1}$$

$$\frac{dX(z)}{dz} = -z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} nx(n) z^{-n}$$

$$= -z^{-1}\mathcal{Z}[nx(n)]$$

$$\therefore \mathcal{Z}[nx(n)] = -z\frac{d}{dz}X(z)$$

$$\mathcal{Z}[n^2 x(n)] = z^2\frac{d^2}{dz^2}X(z) + z\frac{d}{dz}X(z)$$

$$\mathcal{Z}[n^3 x(n)] = -z^3\frac{d^3}{dz^3}X(z) - 3z^2\frac{d^2}{dz^2}X(z) - z\frac{d}{dz}X(z)$$

$$\mathcal{Z}[n^m x(n)] = [-z\frac{d}{dz}]^m X(z)$$

$$\mathcal{Z}[n^m x(n)] = (-1)^m \sum_{k=1}^{m} a_{m,k} z^k \frac{d^k X(z)}{dz^k}$$

$$a_{m,k} = \begin{cases} 1 & k = 1, m \\ a_{m-1,k-1} + k\cdot a_{m-1,k} & else \end{cases}$$

$$a_{m,k} = \frac{1}{k!}\sum_{l=0}^{k} (-1)^l C(k,l)(k-l)^m \qquad C(k,l) = \frac{k!}{l!(k-l)!}$$

z变换的基本性质

- 序列线性加权（z域微分）

例：已知 $x(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}u(n)$，求 $X(z)$。

解：

$$x(n)=\frac{n(n+1)}{2}u(n)=\frac{1}{2}[nu(n)+n^2u(n)]$$

$$nu(n)\ \rightarrow\ -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right)=\frac{z}{(z-1)^2}$$

$$n^2u(n)\ \rightarrow\ -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right)=\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

$$X(z)=\frac{1}{2}[\frac{z}{(z-1)^2}+\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}]=\frac{z^2}{(z-1)^3}\qquad |z|>1$$

6.4 z变换的基本性质

- **z变换的基本性质**
  - **序列指数加权 (z域尺度变换)**

若 $\mathscr{Z}[x(n)] = X(z)$， $R_{x_1} < |z| < R_{x_2}$

则 $\mathscr{Z}[a^n x(n)] = X(\frac{z}{a})$ $R_{x_1} < \left|\frac{z}{a}\right| < R_{x_2}$

$$\mathscr{Z}[(-1)^n x(n)] = X(-z) \qquad R_{x_1} < |z| < R_{x_2}$$

例： $\mathscr{Z}[\cos(\omega_0 n)u(n)] = \dfrac{z(z-\cos\omega_0)}{z^2 - 2z\cos\omega_0 + 1} \qquad |z| > 1$

$$\mathscr{Z}[\beta^n \cos(\omega_0 n)u(n)] = \frac{\frac{z}{\beta}(\frac{z}{\beta} - \cos\omega_0)}{(\frac{z}{\beta})^2 - 2\frac{z}{\beta}\cos\omega_0 + 1}$$

$$= \frac{z(z-\beta\cos\omega_0)}{z^2 - 2\beta z\cos\omega_0 + \beta^2} \qquad |z| > |\beta|$$

6.4 z变换的基本性质

■ z变换的基本性质

- **初值定理**

若 $x(n)$ 是因果序列，

则 $x(0)=\lim\limits_{z\to\infty}X(z)$　　　　$X(z)=x(0)+x(1)\dfrac{1}{z}+x(2)\dfrac{1}{z^2}+\cdots$

- **终值定理**

若 $x(n)$ 是因果序列，

则 $\lim\limits_{n\to\infty}x(n)=\lim\limits_{z\to 1}[(z-1)X(z)]$

条件：$x(\infty)$存在，即 $X(z)$ 的极点全部在单位圆内，允许在 $z=1$ 处有一阶极点。

- **时域卷积定理**

$$\mathscr{Z}[x(n)*h(n)]=X(z)H(z)$$

z变换的基本性质

- 序列反褶

若 $\mathscr{Z}[x(n)] = X(z) \qquad R_{x_1} < |z| < R_{x_2}$

则 $\mathscr{Z}[x(-n)] = X(\frac{1}{z}) \qquad R_{x_1} < \frac{1}{|z|} < R_{x_2}$

例：$\mathscr{Z}[u(n)] = \dfrac{z}{z-1} \qquad |z| > 1$

$$\mathscr{Z}[u(-n)] = \frac{z^{-1}}{z^{-1}-1} = \frac{1}{1-z} \qquad |z| < 1$$

$$\mathscr{Z}[(\frac{1}{2})^n u(-n)] = \mathscr{Z}[(2)^{-n} u(-n)] = \frac{z^{-1}}{z^{-1}-2} = \frac{1}{1-2z} \qquad |z| < \frac{1}{2}$$

$$\mathscr{Z}[2^n u(n)] = \frac{z}{z-2} \qquad |z| > 2$$

z变换解差分方程

线性时不变离散系统的差分方程一般形式

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

将等式两边取单边z变换可得

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}[Y(z)+\sum_{l=-k}^{-1} y(l)z^{-l}] = \sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}[X(z)+\sum_{m=-r}^{-1} x(m)z^{-m}]$$

若激励 $x(n)=0$，即系统零输入，则差分方程变为齐次方程

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = 0$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}[Y(z)+\sum_{l=-k}^{-1} y(l)z^{-l}] = 0$$

$$Y(z) = \frac{-\sum_{k=0}^{N}\left[a_k z^{-k}\cdot\sum_{l=-k}^{-1} y(l)z^{-l}\right]}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

$$y(n) = \mathcal{Z}^{-1}[Y(z)]$$

零输入响应，由系统起始状态 $y(l)$ $(-N \le l \le -1)$ 产生。

6.6 利用z变换解差分方程

- **z变换解差分方程**

线性时不变离散系统的差分方程一般形式 $\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}[Y(z)+\sum_{l=-k}^{-1} y(l)z^{-l}] = \sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}[X(z)+\sum_{m=-r}^{-1} x(m)z^{-m}]$$

若系统的起始状态 $y(l)=0 \quad (-N \le l \le -1)$，即系统处于零起始状态

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}[X(z)+\sum_{m=-r}^{-1} x(m)z^{-m}]$$

$$Y(z) = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}[X(z)+\sum_{m=-r}^{-1} x(m)z^{-m}]}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

零状态响应，由系统输入 $x(m) \quad (-r \le m)$ 产生。

6.6 利用z变换解差分方程

- **z变换解差分方程**

零状态响应：

$$Y(z)=\frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}\left[X(z)+\sum_{m=-r}^{-1} x(m) z^{-m}\right]}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

如果激励 $x(n)$ 为因果序列，则上式可写成

$$Y(z)=X(z)\cdot\frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}=X(z)H(z) \qquad H(z)=\frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

$$y(n)=\mathcal{Z}^{-1}[X(z)H(z)]$$

z变换解差分方程

例：利用z变换解差分方程：$y(n)-y(n-1)-2y(n-2)=x(n)+2x(n-2)$,

$y(-1)=2, y(-2)=-\dfrac{1}{2}, x(n)=u(n)$。

解：对差分方程两边同时取单边z变换，得

$$Y(z)-[z^{-1}Y(z)+y(-1)]-2[z^{-2}Y(z)+y(-1)z^{-1}+y(-2)]=\frac{z}{z-1}+2z^{-2}\frac{z}{z-1}$$

$$Y(z)=\frac{z(2z^2+3z-2)}{(z-1)(z^2-z-2)}\quad=\frac{4z}{z-2}-\frac{1}{2}\frac{z}{z+1}-\frac{3}{2}\frac{z}{z-1}$$

$$y(n)=[4\times 2^n-\frac{1}{2}\times(-1)^n-\frac{3}{2}]u(n)$$

z变换解差分方程

例：已知$y(n)-y(n-1)-2y(n-2)=x(n)+2x(n-2)$,

$y(-1)=2, y(-2)=-\dfrac{1}{2}, x(n)=u(n)$，求 $y_{zi}(n)$。

解：令 $x(n)=0$ ，对差分方程两边同时取单边z变换，得

$$Y_{zi}(z)-[z^{-1}Y_{zi}(z)+y(-1)]-2[z^{-2}Y_{zi}(z)+y(-1)z^{-1}+y(-2)]=0$$

$$Y_{zi}(z)=\frac{y(-1)+2y(-1)z^{-1}+2y(-2)}{1-z^{-1}-2z^{-2}}=\frac{1+4z^{-1}}{1-z^{-1}-2z^{-2}}$$

$$=\frac{z(z+4)}{z^2-z-2}=\frac{2z}{z-2}-\frac{z}{z+1}$$

$$y_{zi}(n)=[2^{n+1}-(-1)^n]u(n)$$

z变换解差分方程

例：已知$y(n)-y(n-1)-2y(n-2)=x(n)+2x(n-2)$,

$y(-1)=2, y(-2)=-\frac{1}{2}, x(n)=u(n)$，求 $y_{zs}(n)$。

解：令 $y(-1)=y(-2)=0$ ，对差分方程两边同时取单边z变换，得

$$Y_{zs}(z)-z^{-1}Y_{zs}(z)-2z^{-2}Y_{zs}(z)=X(z)+2z^{-2}X(z)$$

$$(1-z^{-1}-2z^{-2})Y_{zs}(z)=(1+2z^{-2})X(z)$$

$$Y_{zs}(z)=\frac{1+2z^{-2}}{1-z^{-1}-2z^{-2}}X(z)\ =\frac{z^2+2}{z^2-z-2}\cdot\frac{z}{z-1}$$

$$=\frac{2z}{z-2}+\frac{1}{2}\frac{z}{z+1}-\frac{3}{2}\frac{z}{z-1}$$

$$y_{zs}(n)==[2\times 2^n+\frac{1}{2}\times(-1)^n-\frac{3}{2}]u(n)$$

- **z平面与s平面的映射关系**

$$x_s(t)=x(t)\cdot\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)$$

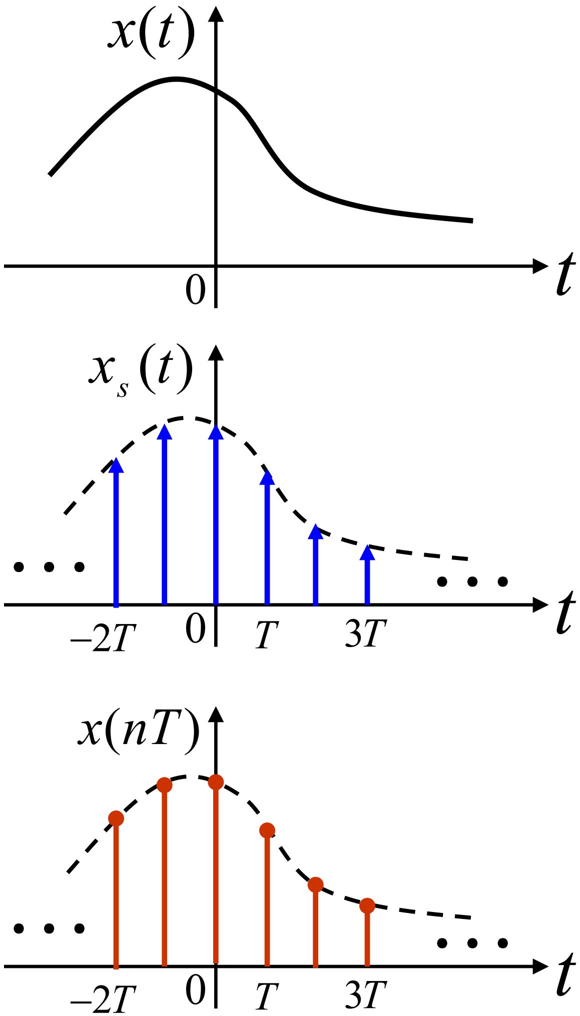
$$X_s(s)=\mathscr{L}[x_s(t)]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)]e^{-st}dt$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)[\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)e^{-st}dt]$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)e^{-snT}$$

$$X(z)=\mathscr{Z}[x(nT)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)z^{-n}$$



$$\mathscr{L}[x_s(t)]\xlongequal{z=e^{sT}}\mathscr{Z}[x(nT)]$$

6.7 z变换与拉普拉斯变换的关系

- **z平面与s平面的映射关系**

$$z = e^{sT} \Rightarrow \begin{cases} r = e^{\sigma T} \\ \theta = \omega T = 2\pi \dfrac{\omega}{\omega_s} \end{cases}$$

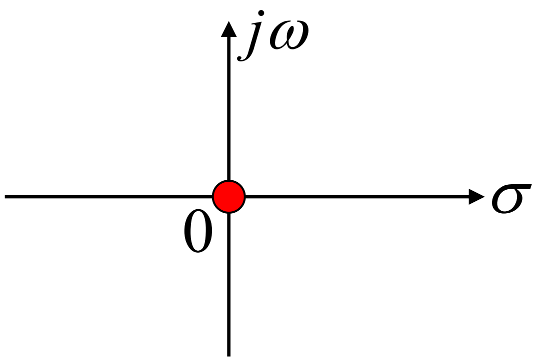
$$z = re^{j\theta}$$

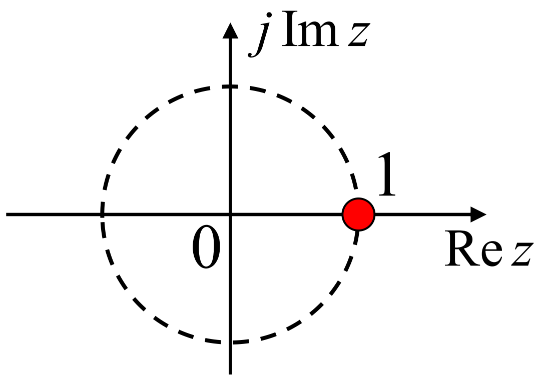
$$s = \sigma + j\omega$$

T—— 抽样间隔， $\omega_s = \dfrac{2\pi}{T}$ —— 抽样角频率

z 平面和 s 平面的映射关系：

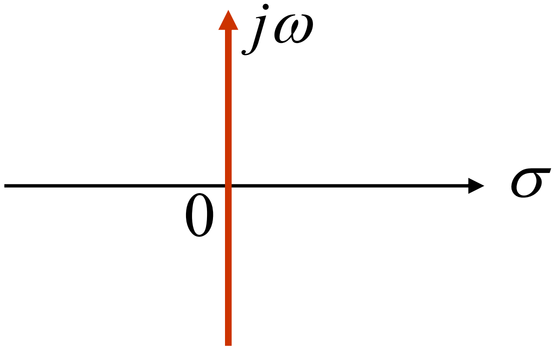
1. s 平面原点 $(\sigma = 0, \omega = 0)$ $\Rightarrow$ $r = e^{\sigma T} = 1, \quad \theta = \omega T = 0$

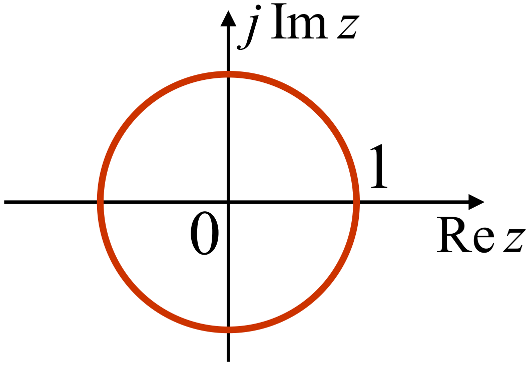




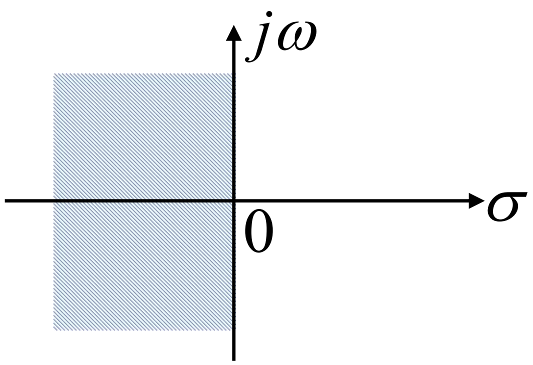
■ z平面与s平面的映射关系

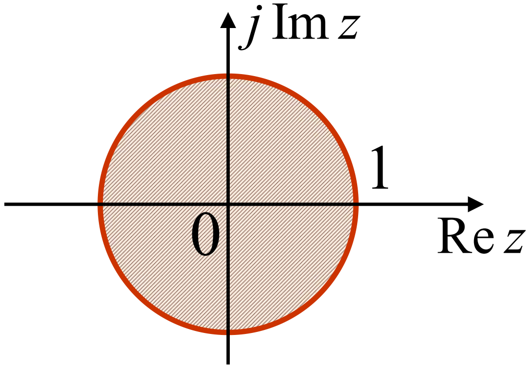
2\. s 平面虚轴 $(\sigma=0,\omega)$ ⇒ $r=e^{\sigma T}=1,\ \theta=\omega T$ 任意





3\. s 左半平面 $(\sigma<0,\omega)$ ⇒ $r=e^{\sigma T}<1,\ \theta=\omega T$ 单位圆内

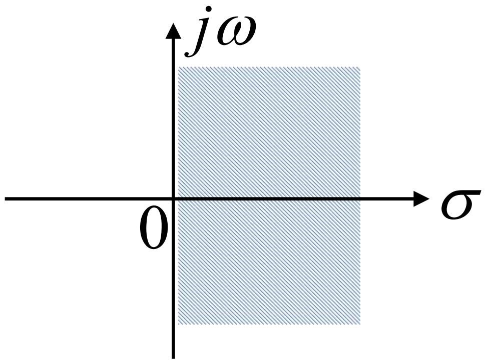


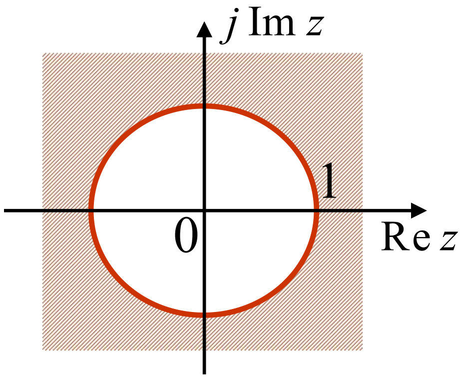


6.7 z变换与拉普拉斯变换的关系

- **z平面与s平面的映射关系**

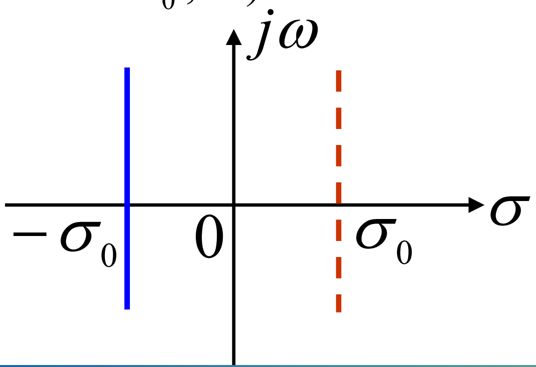
4. s 右半平面$(\sigma > 0, \omega)$ ⟹ $r = e^{\sigma T} > 1,\ \theta = \omega T$ 单位圆外

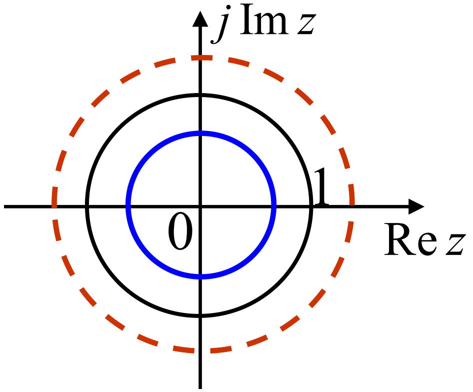




5. 平行于虚轴的直线 ⟹ $r = e^{-\sigma_0 T} < 1$（圆） $r = e^{\sigma_0 T} > 1$（圆）

$(\sigma = \pm\delta_0, \omega)$

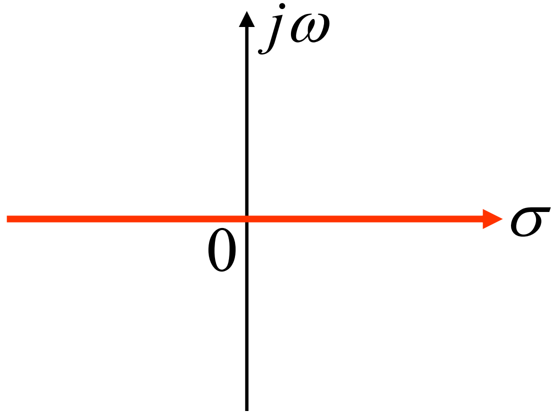


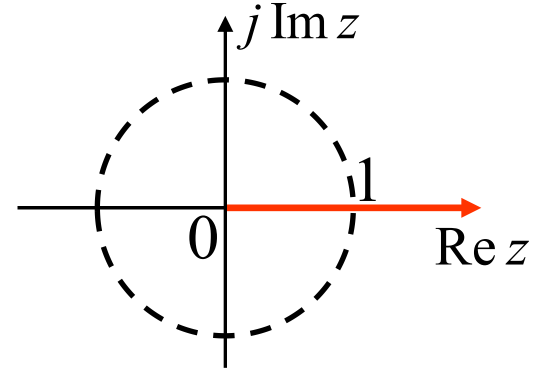


6.7 z变换与拉普拉斯变换的关系

■ z平面与s平面的映射关系

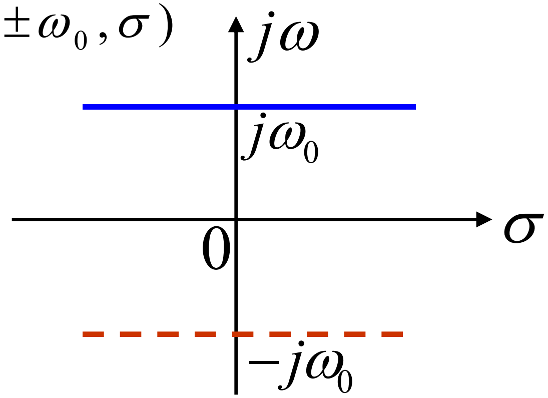
6. 实轴$(\omega = 0, \sigma)$ $\quad$ $r = e^{\sigma T} > 0, \;\; \theta = 0$ 正实轴

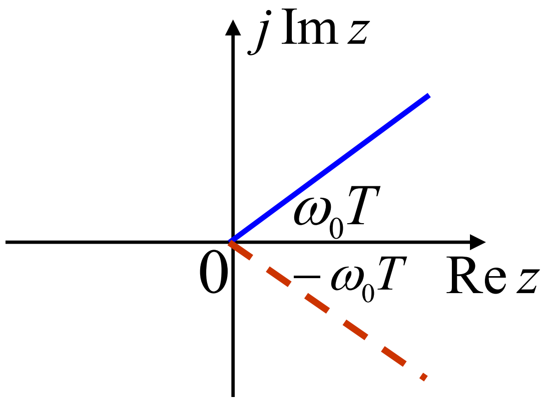




7. 平行于实轴的直线 $\quad$ $\theta = \omega_0 T \quad \theta = -\omega_0 T$

$(\omega = \pm\omega_0, \sigma)$





6.8 离散系统的系统函数

系统函数$H(z)$的定义与求法

线性时不变离散系统的差分方程一般形式

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

如果激励 $x(n)$ 为因果序列，且系统处于零状态，则上式z变换得

$$Y(z) \cdot \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = X(z) \cdot \sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

离散时间系统的系统函数，

零状态响应与激励的z变换之比

$$y_{zs}(n) = h(n) * x(n) \qquad \mathscr{Z}[y_{zs}(n)] = \mathscr{Z}[h(n)] \cdot \mathscr{Z}[x(n)]$$

$$H(z) = \mathscr{Z}[h(n)] = \frac{\mathscr{Z}[y_{zs}(n)]}{\mathscr{Z}[x(n)]} \qquad h(n) \leftrightarrow H(z)$$

■ 系统函数*H*(*z*)的定义与求法

例：已知 $y(n)-\frac{1}{6}y(n-1)-\frac{1}{6}y(n-2)=x(n)+2x(n-1)$，求 $H(z),h(n)$。

解： 令 $y(-1)=y(-2)=0$，对差分方程两边同时取单边z变换，得

$$(1-\frac{1}{6}z^{-1}-\frac{1}{6}z^{-2})Y_{zs}(z)=(1+2z^{-1})X(z)$$

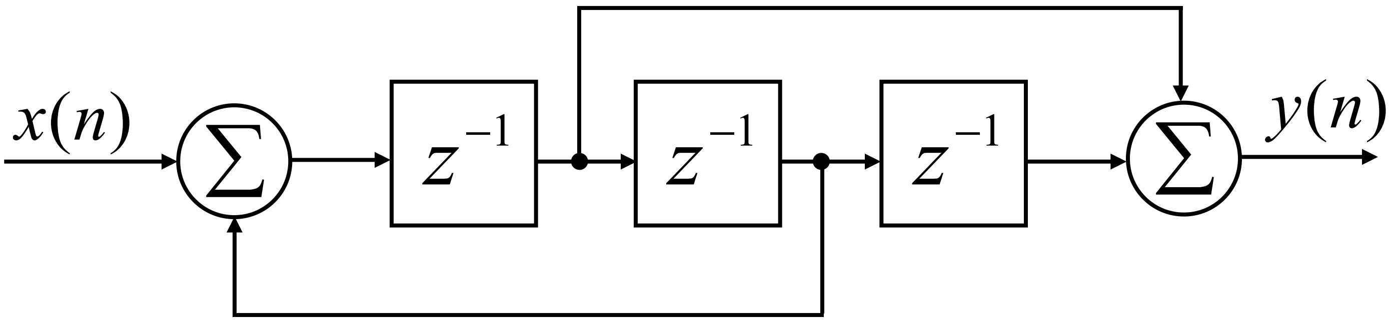
$$H(z)=\frac{Y_{zs}(z)}{X(z)}=\frac{1+2z^{-1}}{1-\frac{1}{6}z^{-1}-\frac{1}{6}z^{-2}}=\frac{z^2+2z}{z^2-\frac{1}{6}z-\frac{1}{6}}=\frac{3z}{z-\frac{1}{2}}+\frac{-2z}{z+\frac{1}{3}}$$

$$h(n)=[3\times(\frac{1}{2})^n-2\times(-\frac{1}{3})^n]u(n)$$

6.8 离散系统的系统函数

■ 系统函数*H*(*z*)的定义与求法

例：系统框图如下。已知 $x(n)=u(n)$，求 $y_{zs}(n)$。



解：$$y(n)-y(n-2)=x(n-1)+x(n-3) \qquad H(z)=\frac{z^{-1}+z^{-3}}{1-z^{-2}}=\frac{z^2+1}{z(z^2-1)}$$

$$Y_{zs}(z)=H(z)X(z)=\frac{z^2+1}{z(z^2-1)}\frac{z}{z-1}=\frac{z^2+1}{(z+1)(z-1)^2}$$

$$=1-\frac{1}{2}\frac{z}{z+1}+\frac{z}{(z-1)^2}-\frac{1}{2}\frac{z}{z-1}=\frac{1}{2}\frac{1}{z+1}+\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{z-1}$$

$$y_{zs}(n)=\delta(n)+[-\frac{1}{2}\times(-1)^n+n-\frac{1}{2}]u(n)=[-\frac{1}{2}\times(-1)^n+n-\frac{1}{2}]u(n-1)$$

系统函数*H*(*z*)的定义与求法

例：某LTI离散系统，已知激励 $x(n)=(-\frac{1}{2})^n u(n)$ 产生的零状态响应

$y_{zs}(n)=[\frac{3}{2}\times(\frac{1}{2})^n+4\times(-\frac{1}{3})^n-\frac{9}{2}\times(-\frac{1}{2})^n]u(n)$，求 $h(n)$。

解：$$Y_{zs}(z)=\frac{3}{2}\cdot\frac{z}{z-\frac{1}{2}}+4\cdot\frac{z}{z+\frac{1}{3}}-\frac{9}{2}\cdot\frac{z}{z+\frac{1}{2}}=\frac{z^3+2z^2}{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{3})(z+\frac{1}{2})}$$

$$X(z)=\frac{z}{z+\frac{1}{2}}$$

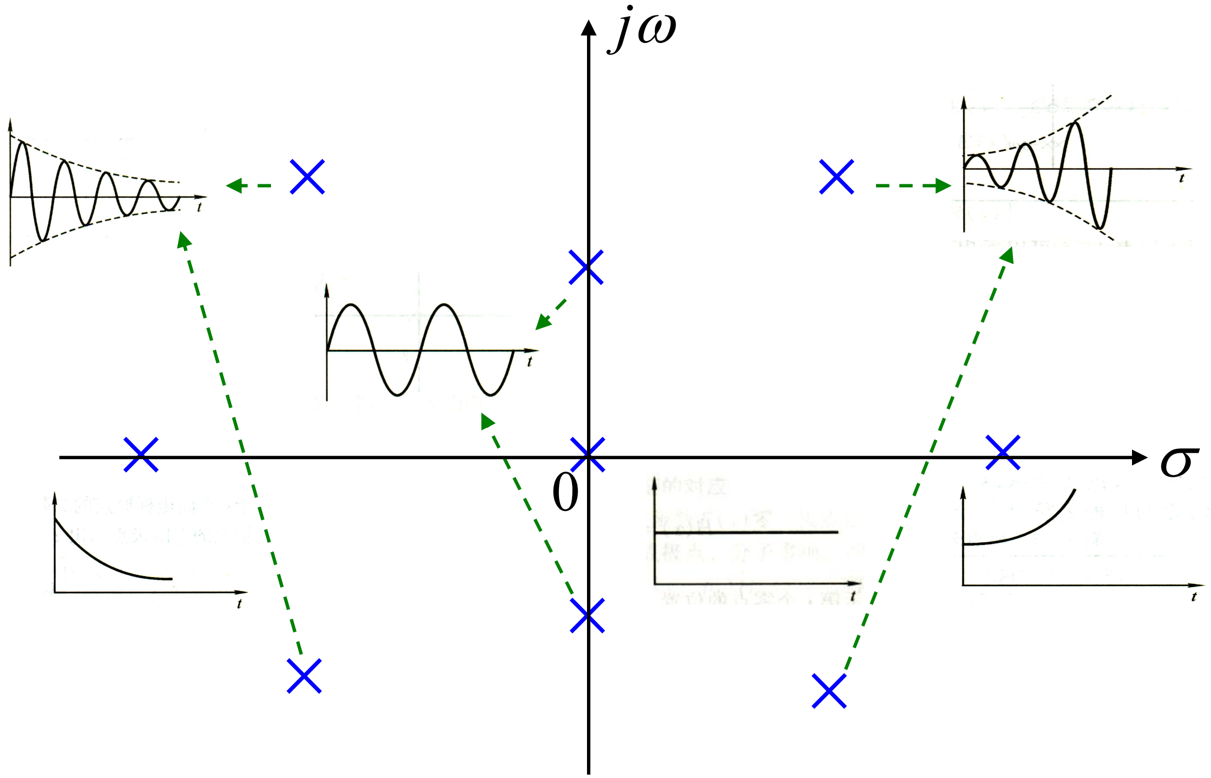
$$H(z)=\frac{Y_{zs}(z)}{X(z)}=\frac{z^3+2z^2}{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{3})(z+\frac{1}{2})}\cdot\frac{z+\frac{1}{2}}{z}=\frac{z^2+2z}{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{3})}=\frac{3z}{z-\frac{1}{2}}+\frac{-2z}{z+\frac{1}{3}}$$

$$h(n)=[3\times(\frac{1}{2})^n-2\times(-\frac{1}{3})^n]u(n)$$

■ 系统函数的零极点分布对系统特性的影响

- 由系统函数的零极点分布确定单位样值响应

连续时间系统 $H(s)$ 的极点位置与 $h(t)$ 的关系：



系统函数的零极点分布对系统特性的影响

- **由系统函数的零极点分布确定单位样值响应**

$$h(n)=\mathscr{Z}^{-1}[H(z)]=\mathscr{Z}^{-1}\left[\sum_{k=0}^{N}\frac{A_k z}{z-p_k}\right]=\sum_{k=0}^{N}A_k(p_k)^n u(n)$$

$$p_{1,2}=re^{\pm j\theta}\quad\Rightarrow\quad h_1(n)=C_1r^ne^{jn\theta}+C_2r^ne^{-jn\theta}=Ar^n\cos(n\theta+\varphi)$$

$r<1,\quad h_1(n)$ 衰减；

$r=1,\quad h_1(n)$ 等幅；

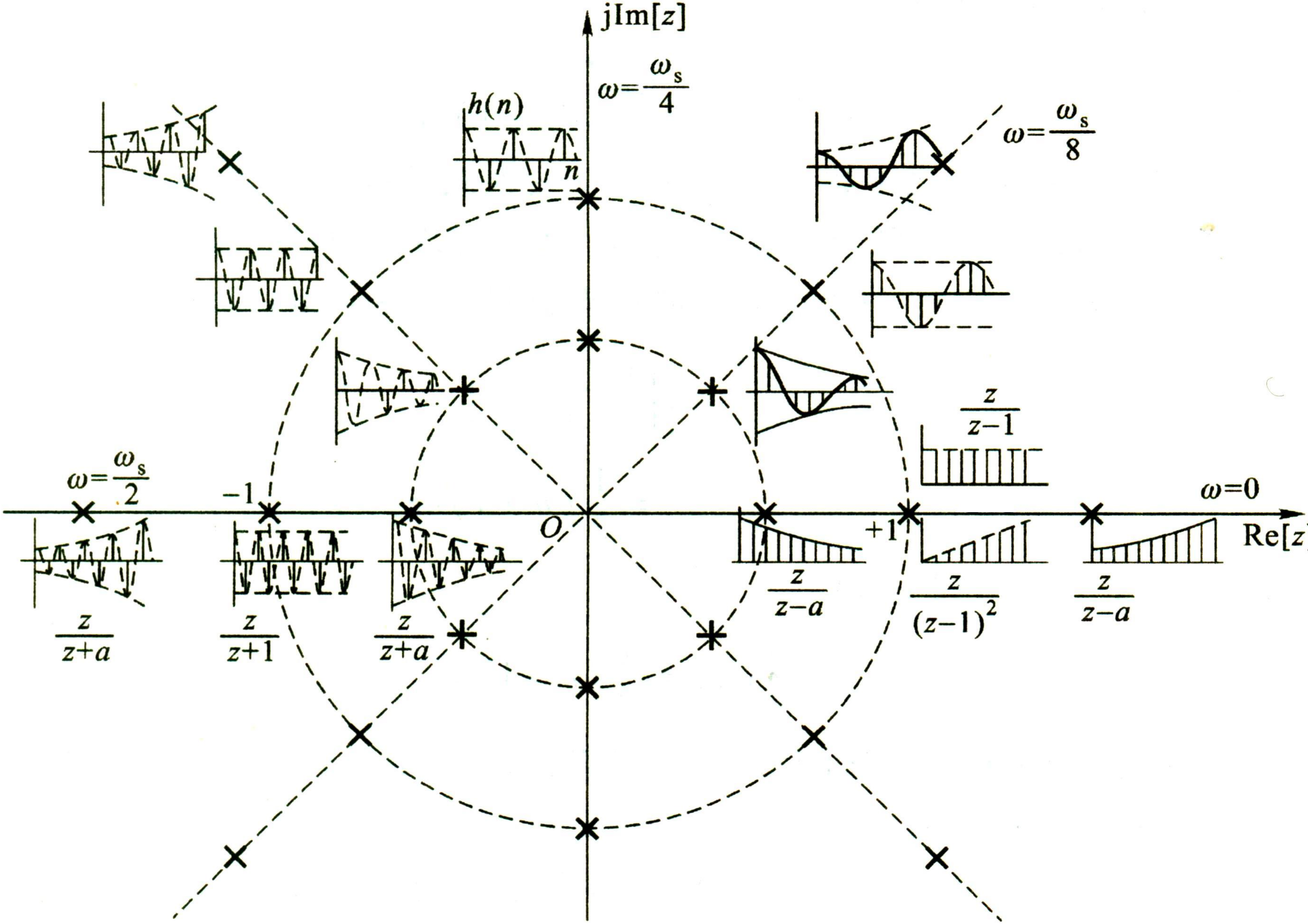
$r>1,\quad h_1(n)$ 增长。

$\theta=0,\ h_1(n)$ 单调变化；

$\theta=\dfrac{\pi}{4},h_1(n)$ 8个序号为一个振荡周期；

$\theta=\dfrac{\pi}{2},h_1(n)$ 4个序号为一个振荡周期；

$\theta=\pi,\ h_1(n)$ 2个序号为一个振荡周期。



jIm[z]
$\omega=\frac{\omega_s}{4}$
$h(n)$
n
$\omega=\frac{\omega_s}{8}$
$\omega=\frac{\omega_s}{2}$
-1
O
$+1$
$\omega=0$
Re[z]
$\frac{z}{z-1}$
$\frac{z}{z+a}$
$\frac{z}{z+1}$
$\frac{z}{z+a}$
$\frac{z}{z-a}$
$\frac{z}{(z-1)^2}$
$\frac{z}{z-a}$

6.8 离散系统的系统函数

- 系统函数的零极点分布对系统特性的影响
  - 离散时间系统的稳定性和因果性

离散*LTI*系统*BIBO*稳定 $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)| \le \mathrm{M}$

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)<\infty$$

$z=1$(在单位圆上)

$\Updownarrow$

$H(z)$的收敛域包含单位圆。

对因果*LTI*系统：$h(n)=h(n)u(n)$

离散因果*LTI*系统稳定 $\Leftrightarrow$ $H(z)$的极点全部在单位圆内。

结论： $H(z)$的收敛域包含单位圆则稳定。

6.8 离散系统的系统函数

- 系统函数的零极点分布对系统特性的影响
  - 离散时间系统的稳定性和因果性

※ 由$H(z)$ 的极点分布判断因果*LTI* 系统的稳定性：

（1）极点全部在单位圆内 $\Rightarrow h(n)$衰减，系统稳定；

（2）单位圆上有一阶极点，其他极点全部在单位圆内

$\Rightarrow h(n)$等幅，系统临界稳定；

（3）有极点在单位圆外，或单位圆上有二阶或二阶以上极点

$\Rightarrow h(n)$增长，系统不稳定。

- 系统函数的零极点分布对系统特性的影响
  - 离散时间系统的稳定性和因果性

例：判断系统的因果性和稳定性。
(稳定性收敛域是否包含单位圆)

（1） $H(z)=\dfrac{z}{z-0.5} \quad ,|z|>0.5$ 因果、稳定

（2） $H(z)=\dfrac{z}{z-2} \quad ,|z|>2$ 因果、非稳定

（3） $H(z)=\dfrac{z}{z-2} \quad ,|z|<2$ 非因果、稳定

（4） $H(z)=\dfrac{z}{(z-0.5)(z-2)} \quad ,0.5<|z|<2$ 非因果、稳定

系统函数的零极点分布对系统特性的影响

- 离散时间系统的稳定性和因果性

例：已知某LTI离散系统方程为 $y(n)-ky(n-1)=x(n), k$ 为实数，系统为因果系统；(1) 求系统函数 $H(z)$ 和单位样值响应 $h(n)$；(2) 讨论该系统的收敛性和稳定性。

解： $Y(z)-kz^{-1}Y(z)=X(z)$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{1-kz^{-1}}$$

极点 $z=k$

因为因果系统，所以 $h(n)=k^n u(n)$, 收敛域 $|z|>|k|$

若 $|k|<1$，收敛域包含单位圆，则系统稳定；

若 $|k|\geq 1$，收敛域不包含单位圆，则系统不稳定。

6.8 离散系统的系统函数

■ 系统函数的零极点分布对系统特性的影响

- **离散时间系统的稳定性和因果性**

例：已知某离散系统方程为 $y(n)+0.2y(n-1)-0.24y(n-2)=x(n)+x(n-1)$

求系统函数 $H(z)$，并讨论此因果系统的收敛性和稳定性。

解：在零起始状态下，对差分方程两边同时取单边z变换，得

$$Y(z)+0.2z^{-1}Y(z)-0.24z^{-2}Y(z)=X(z)+z^{-1}X(z)$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+z^{-1}}{1+0.2z^{-1}-0.24z^{-2}}=\frac{z(z+1)}{(z-0.4)(z+0.6)}$$

极点 $p_1=0.4, p_2=-0.6$，均在单位圆内，故系统稳定。

系统的收敛域 $|z|>0.6$，包含单位圆，是稳定的因果系统。

■ 系统函数的零极点分布对系统特性的影响

- **离散时间系统的稳定性和因果性**

例：若某离散因果系统的系统函数为 $H(z)=\dfrac{z^2-1}{z^2+0.5z+(K+1)}$，为使系统稳定，$K$ 应满足什么条件？

解：极点 $p_{1,2}=-\dfrac{1}{4}\pm\dfrac{1}{4}\sqrt{-16K-15}$

(1) 当 $-16K-15\geq 0$,

$$-1<-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{-16K-15},\ -\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{-16K-15}<1$$

$$\therefore -\frac{3}{2}<K\leq -\frac{15}{16}$$

(2) 当 $-16K-15<0$,

$$\frac{1}{16}+\frac{16K+15}{16}<1 \quad \therefore -\frac{15}{16}<K<0$$

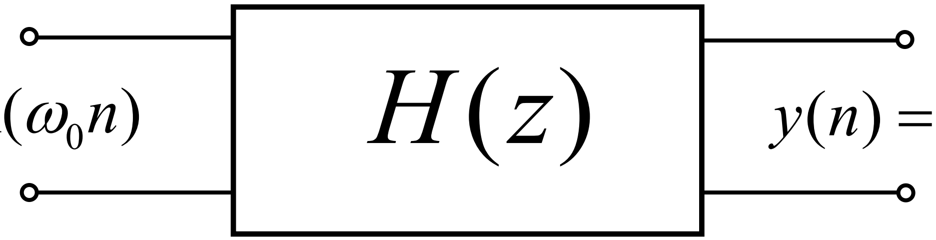
综上所述，当 $-\dfrac{3}{2}<K<0$ 时系统稳定。

6.9 离散时间系统的频率响应

什么是离散时间系统的频率响应？

稳定系统在正弦序列激励下，稳态响应随激励信号频率的变化情况。

$$x(n) = \sin(\omega_0 n)$$



$$y(n) = ?\sin(\omega_0 n + ?)$$

幅度随频率的变化情况 —— 幅频响应特性

相位随频率的变化情况 —— 相频响应特性

■ **频响特性和系统函数 $H(z)$ 的关系**

设 $x_1(n)=e^{j\omega_0 n}$,

则 $y_1(n)=h(n)*x_1(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)e^{j\omega_0(n-m)}=\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)e^{-j\omega_0 m}\right]e^{j\omega_0 n}$

$$=H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n}=\left|H(e^{j\omega_0})\right|e^{j\varphi(\omega_0)}e^{j\omega_0 n}$$

设 $x_2(n)=e^{-j\omega_0 n}$,

则 $y_2(n)=H(e^{-j\omega_0})e^{-j\omega_0 n}=\left|H(e^{j\omega_0})\right|e^{-j\varphi(\omega_0)}e^{-j\omega_0 n}$

那么 $\sin(\omega_0 n)=\dfrac{x_1(n)-x_2(n)}{2j}$ 产生的响应为

$$y(n)=\frac{y_1(n)-y_2(n)}{2j}=\left|H(e^{j\omega_0})\right|\sin[\omega_0 n+\varphi(\omega_0)]$$

$$X(z)\big|_{z=e^{j\omega}}=X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-jn\omega}$$ 序列的傅里叶变换

■ 频响特性和系统函数 $H(z)$ 的关系

例：若某因果LTI离散时间系统的系统函数为 $H(z)=\dfrac{z}{z-\frac{1}{2}}$，求 $x(n)=\sin(\frac{\pi}{3}n)$ 通过系统产生的响应 $y(n)$ 。

解：

$$H(e^{j\frac{\pi}{3}})=H(z)\Big|_{z=e^{j\frac{\pi}{3}}}=\frac{e^{j\frac{\pi}{3}}}{e^{j\frac{\pi}{3}}-\frac{1}{2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-j\frac{\pi}{6}}$$

$$\therefore y(n)=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin(\frac{\pi}{3}n-\frac{\pi}{6})$$

6.9 离散时间系统的频率响应

- 频响特性和系统函数 $H(z)$ 的关系

$$H(e^{j\omega}) = \left|H(e^{j\omega})\right| e^{j\varphi(\omega)}$$ ——离散时间系统的频率响应特性

$\left|H(e^{j\omega})\right| \sim \omega$ ：幅频响应特性

$\varphi(\omega) \sim \omega$ ：相频响应特性

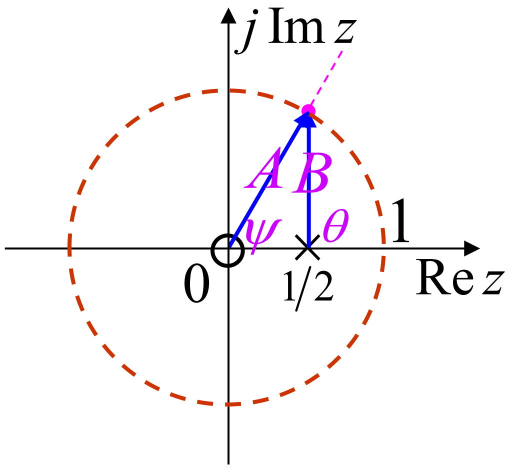
■ 频响特性的几何确定

若 $H(z)=\dfrac{\prod_{r=1}^{M}(z-z_r)}{\prod_{k=1}^{N}(z-p_k)}$， 则 $H(e^{j\omega})=\dfrac{\prod_{r=1}^{M}(e^{j\omega}-z_r)}{\prod_{k=1}^{N}(e^{j\omega}-p_k)}=\left|H(e^{j\omega})\right|e^{j\varphi(\omega)}$

设 $e^{j\omega}-z_r=A_r e^{j\psi_r}, e^{j\omega}-p_k=B_k e^{j\theta_k}$

幅度响应 $\left|H(e^{j\omega})\right|=\dfrac{\prod_{r=1}^{M}A_r}{\prod_{k=1}^{N}B_k}$

$$H(z)=\frac{z}{z-\frac{1}{2}}$$



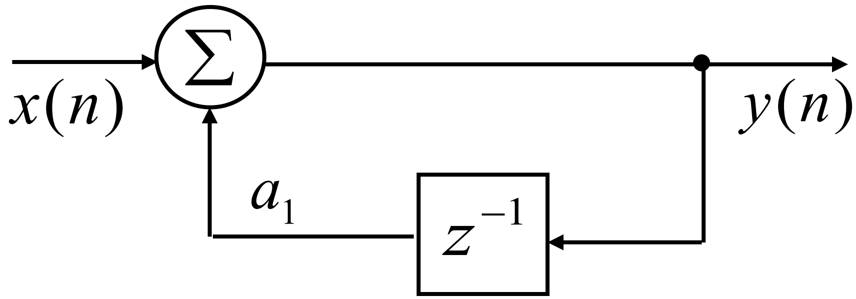
相位响应 $\varphi(\omega)=\sum_{r=1}^{M}\psi_r-\sum_{k=1}^{N}\theta_k$

$$H(e^{j\omega})=\frac{e^{j\omega}-0}{e^{j\omega}-\frac{1}{2}}=\frac{Ae^{j\psi}}{Be^{j\theta}}=\frac{A}{B}e^{j(\psi-\theta)}$$

6.9 离散时间系统的频率响应

■ 频响特性的几何确定

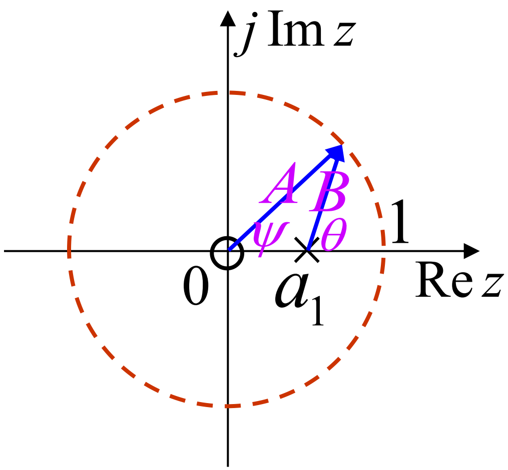
例：求图示一阶离散系统的频率响应。



解：

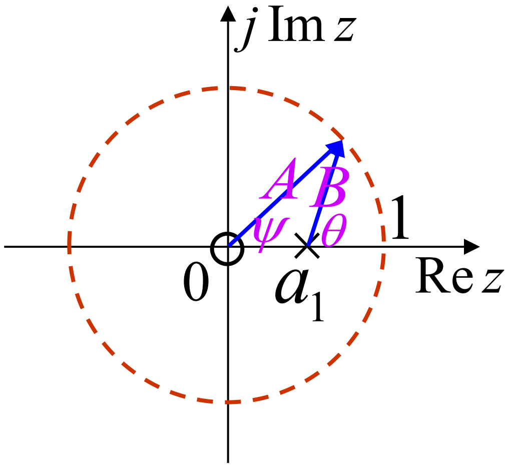
$$H(z)=\frac{1}{1-a_1z^{-1}}=\frac{z}{z-a_1}$$

$$H(e^{j\omega})=\frac{e^{j\omega}-0}{e^{j\omega}-a_1}=\frac{Ae^{\psi}}{Be^{\theta}}=\frac{A}{B}e^{j(\psi-\theta)}$$



频响特性的几何确定

例：求图示一阶离散系统的频率响应。



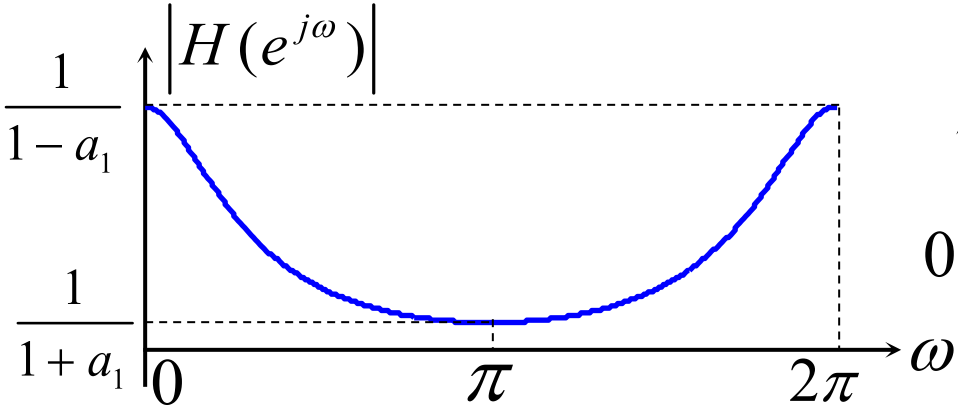
$$H(e^{j\omega})=\frac{e^{j\omega}-0}{e^{j\omega}-a_1}=\frac{Ae^{\psi}}{Be^{\theta}}=\frac{A}{B}e^{j(\psi-\theta)}$$

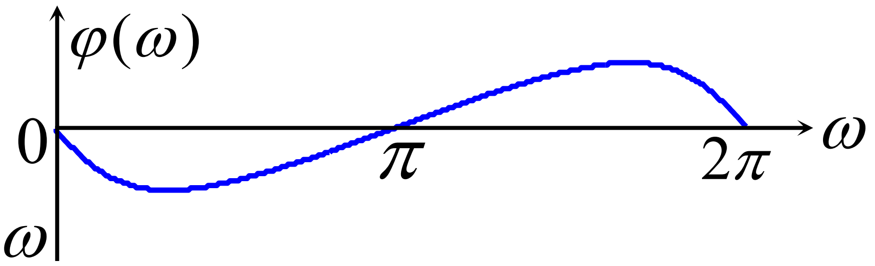
解：

(1) $0<a_1<1$

$$\left|H(e^{j\omega})\right|=\frac{1}{B},\qquad \varphi(\omega)=\psi-\theta$$

系统具有**低通**滤波特性

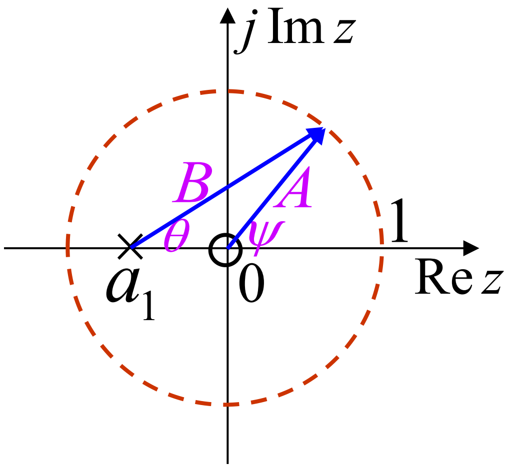




■ 频响特性的几何确定

例：求图示一阶离散系统的频率响应。

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega}-0}{e^{j\omega}-a_1} = \frac{Ae^{\psi}}{Be^{\theta}} = \frac{A}{B}e^{j(\psi-\theta)}$$

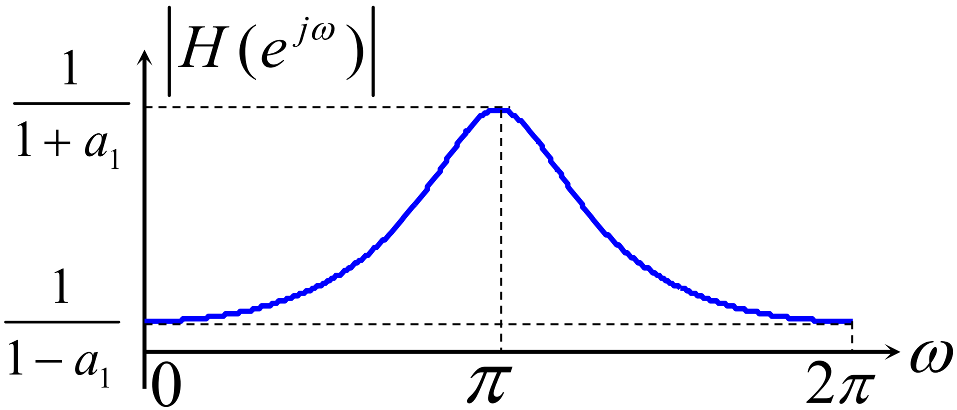


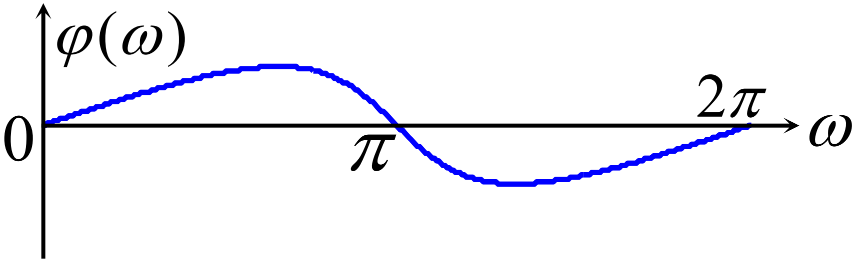
解：

(2) $-1 < a_1 < 0$

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \frac{1}{B}, \quad \varphi(\omega) = \psi - \theta$$

系统具有**高通**滤波特性

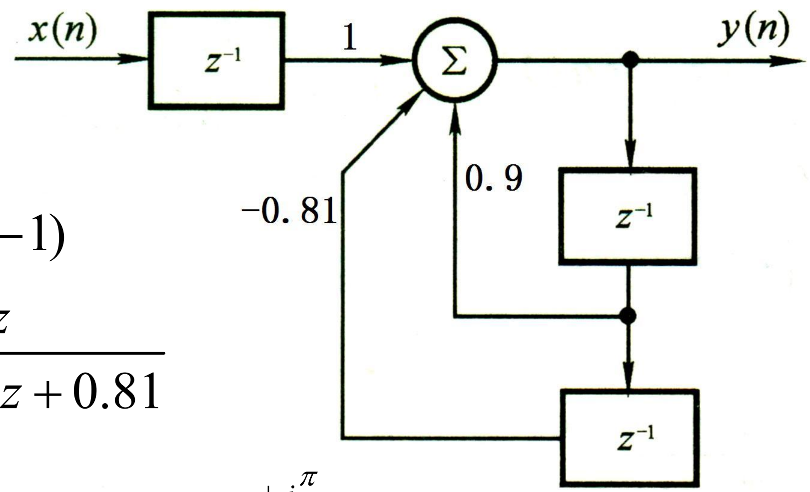




6.9 离散时间系统的频率响应

■ 频响特性的几何确定

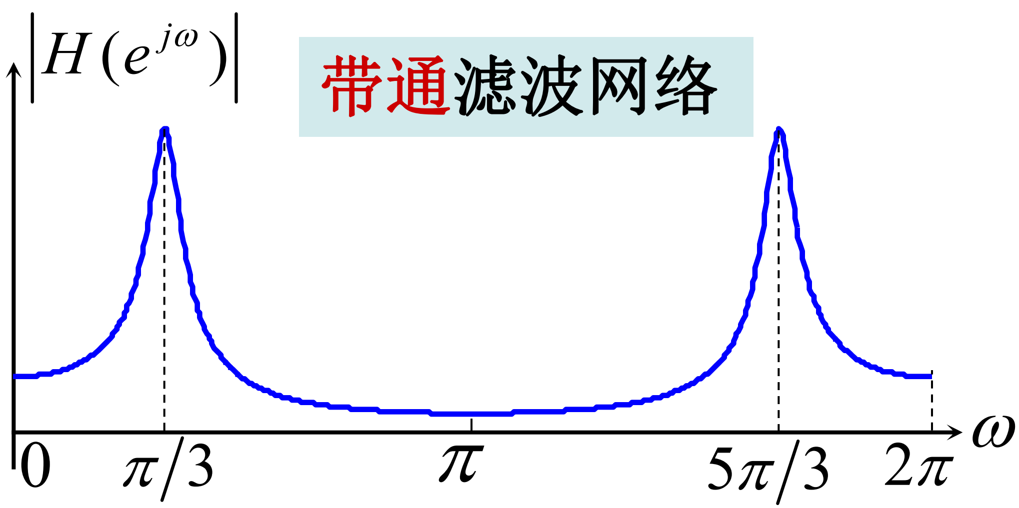
例：求图示二阶离散系统的频率响应。



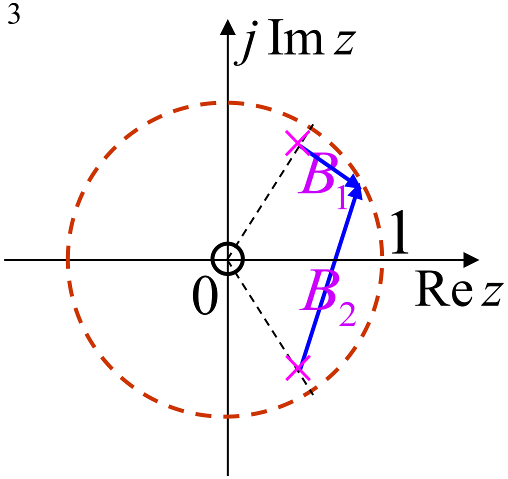
解：$y(n)-0.9y(n-1)+0.81y(n-2)=x(n-1)$

$$H(z)=\frac{z^{-1}}{1-0.9z^{-1}+0.81z^{-2}}=\frac{z}{z^2-0.9z+0.81}$$

$$H(e^{j\omega})=\frac{e^{j\omega}-z_1}{(e^{j\omega}-p_1)(e^{j\omega}-p_2)} \qquad z_1=0,\ p_{1,2}=0.9e^{\pm j\frac{\pi}{3}}$$



带通滤波网络

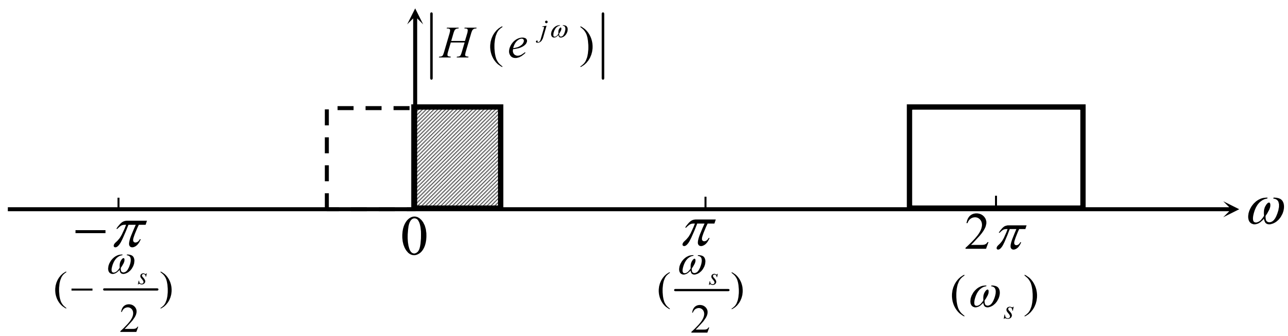


$$\left|H(e^{j\omega})\right|=\frac{1}{B_1B_2}$$

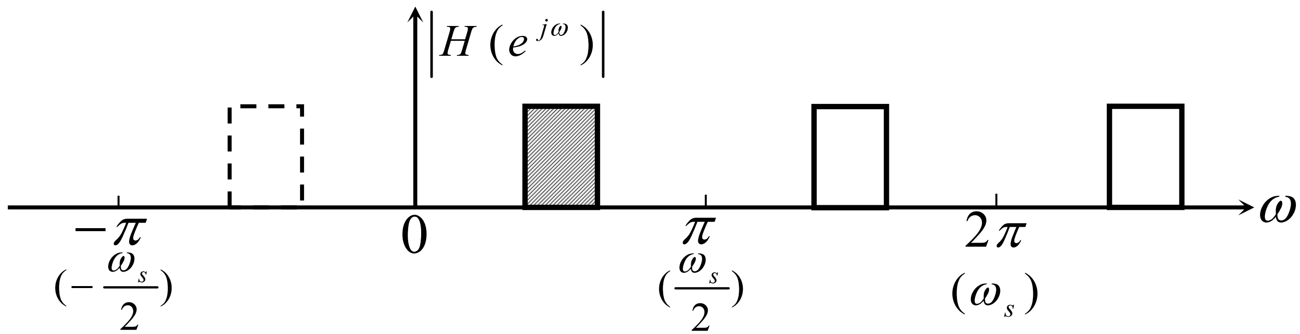
6.9 离散时间系统的频率响应

- 离散时间系统的各种理想滤波特性

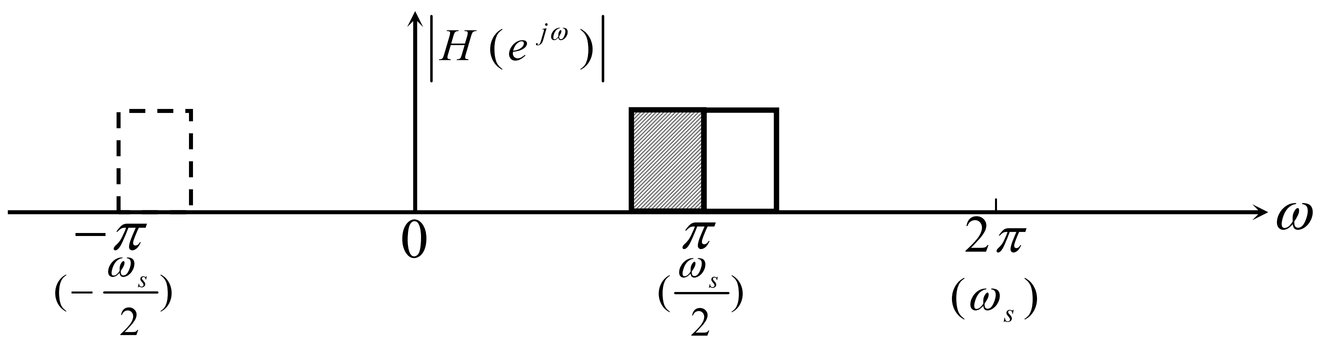
（a）低通



（b）带通



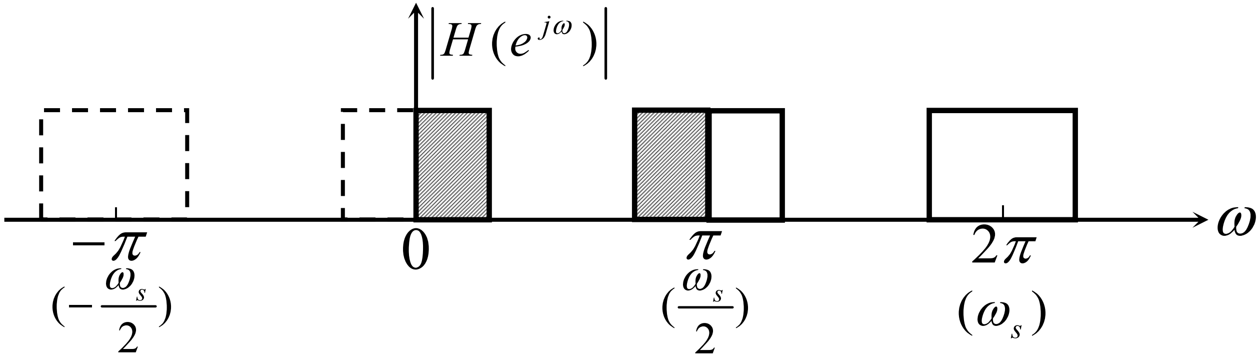
（c）高通



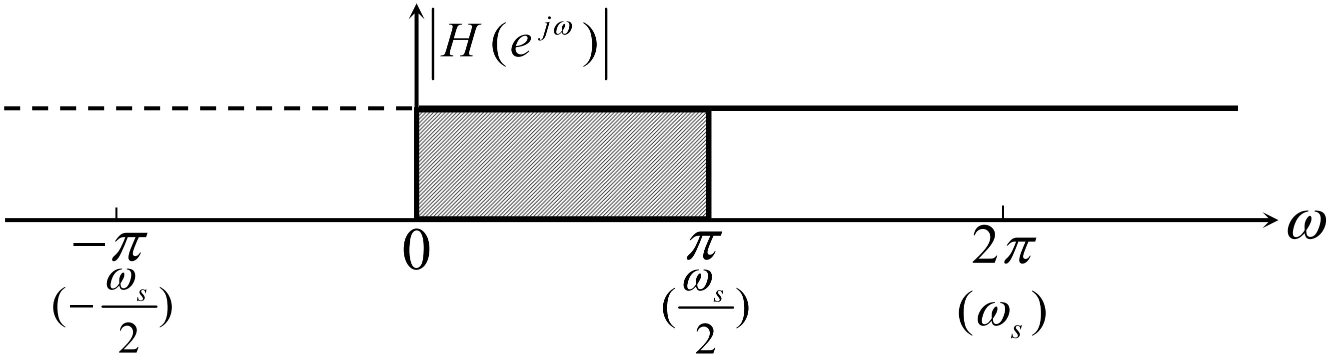
6.9 离散时间系统的频率响应

- 离散时间系统的各种理想滤波特性

（d）带阻



（e）全通

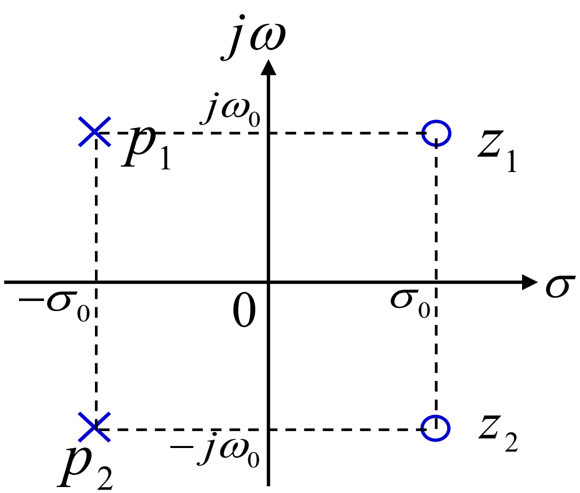


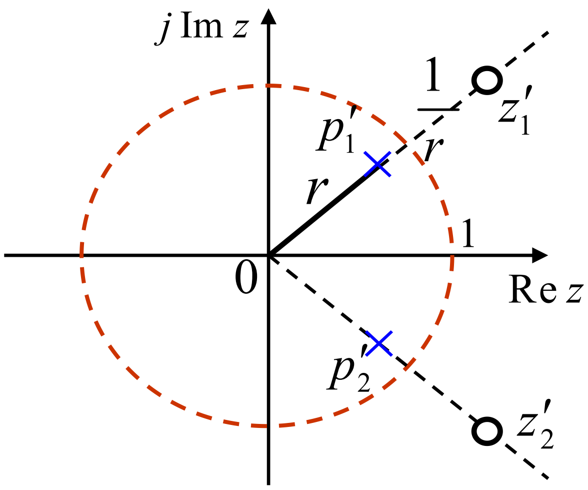
- **离散时间系统的全通特性** $\left|H(e^{j\omega})\right| = K$

具有全通特性的因果离散系统零、极点分布特征：

（1）极点全部在单位圆内，零点全部在单位圆外；

（2）零点与极点的模互为倒数，辐角相等。





$$p_{1,2} = -\sigma_0 \pm j\omega_0 \xrightarrow{z=e^{sT}} p_{1,2}' = e^{-\sigma_0 T} e^{\pm j\omega_0 T} = re^{\pm j\theta}$$

$$z_{1,2} = \sigma_0 \pm j\omega_0 \xrightarrow{z=e^{sT}} z_{1,2}' = e^{\sigma_0 T} e^{\pm j\omega_0 T} = \frac{1}{r} e^{\pm j\theta}$$

6.9 离散时间系统的频率响应

■ 离散时间系统的全通特性

例：某因果离散系统的系统函数为 $H(z)=\dfrac{(z-2)(z^2+az+b)}{(z+c)(z^2+z+0.5)}$，求使得系统为三阶全通系统的a、b、c值。

解：

零点： $z_1=2,\qquad z_{2,3}=\sqrt{2}e^{\pm j\frac{3\pi}{4}}=-1\pm j$

极点： $p_1=-c\ =\dfrac{1}{2},\qquad p_{2,3}=-\dfrac{1}{2}\pm j\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{\pm j\frac{3\pi}{4}}$

$$[(z-(-1+j)][(z-(-1-j)]\ =(z+1)^2+1\ =z^2+2z+2$$

所以：$a=b=2,\quad c=-\dfrac{1}{2}$