《信号与系统》

第5章 离散时间系统的时域分析

吉小鹏

E-mail: 003163@nuist.edu.cn

南京信息工程大学 电子与信息工程学院 尚贤楼207

本章讨论离散时间信号的概念和基本运算，以及离散时间系统的数学模型和时域分析方法。

提纲

5.1 引言

5.2 离散时间信号——序列

5.3 离散时间系统的数学模型

5.4 常系数线性差分方程的求解

5.5 离散时间系统的单位样值响应

5.6 卷积（卷积和）

5.1 引言

- **连续时间系统与离散时间系统比较**

连续时间信号：

$f(t)$是连续变化的t的函数，除若干不连续点之外对于任意时间值都可以给出确定的函数值。函数的波形都是具有平滑曲线的形状，一般也称模拟信号。

离散时间信号：

时间变量是离散的，函数只在某些规定的时刻有确定的值，在其他时间没有定义。离散信号可以由模拟信号抽样而得，也可以由实际系统生成。

连续时间系统：系统的输入、输出都是连续的时间信号。

离散时间系统：系统的输入、输出都是离散的时间信号。

5.1 引言

- **连续时间系统与离散时间系统分析比较**

系统分析

连续时间系统——微分方程描述

- 分析
  - 时域分析
    - 经典法：齐次解 + 特解
    - 零输入响应 + 零状态响应
  - 变换域分析：拉氏变换法

离散时间系统——差分方程描述

差分方程的解法与微分方程类似

- 分析
  - 时域分析
    - 经典法：齐次解 + 特解
    - 零输入响应 + 零状态响应
  - 变换域分析：z 变换法

5.1 引言

- 连续时间系统与离散时间系统分析比较

连续系统	离散系统
微分方程	差分方程
卷积积分	卷积和
拉氏变换	Z变换
连续傅立叶变换	离散傅立叶变换
卷积定理	卷积定理

5.2 离散时间信号——序列

离散信号的表示方法

$$x(t)\ \rightarrow\ x(nT)\ \xrightarrow{\text{等间隔}T}\ x(n)\qquad (n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots)$$

三种表示方法：函数、波形、列举

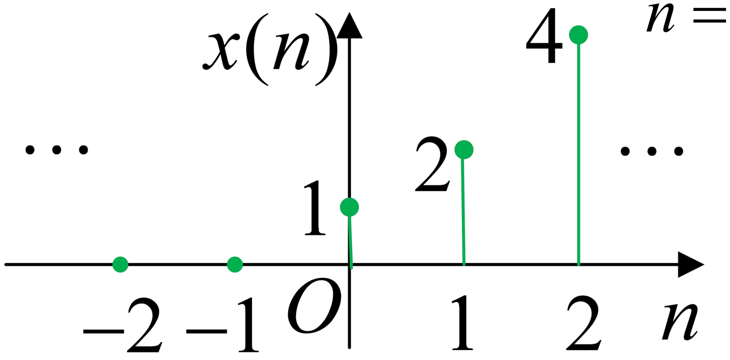
例：

已知 $x(n)=\begin{cases}2^n, & n\geq 0\\ 0, & n<0\end{cases}$，试写出其序列形式并画出波形。

解：

序列形式： $x(n)=\{\cdots,\quad 0,\quad 0,\quad \underset{\substack{\uparrow\\ n=0}}{1},\quad 2,\quad 4,\quad 8,\quad \cdots\}$

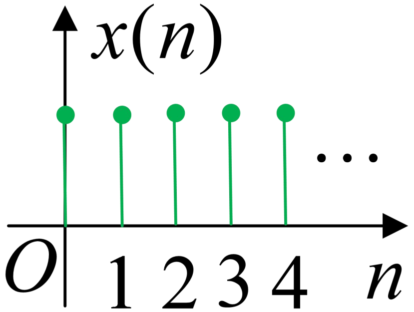
波形：



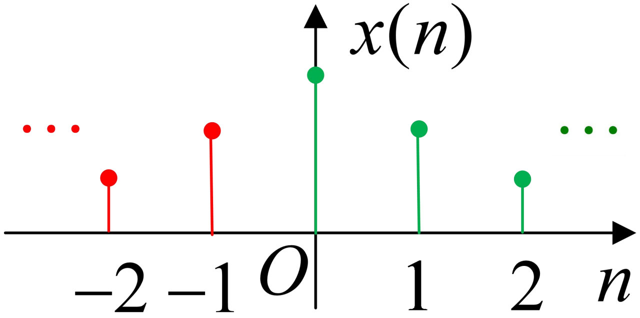
5.2 离散时间信号——序列

- **离散信号的表示方法**

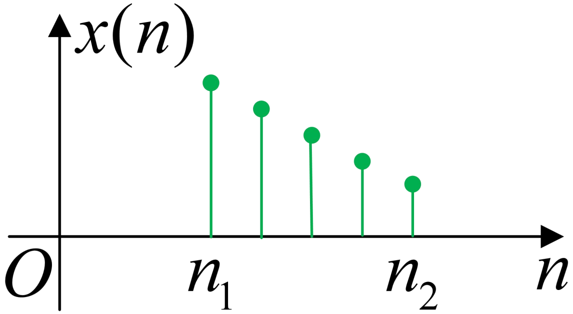
序列的三种形式：



单边序列 $n \geq 0$



双边序列 $-\infty \leq n \leq \infty$



有限长序列 $n_1 \leq n \leq n_2$

5.2 离散时间信号——序列

- **离散信号的运算**

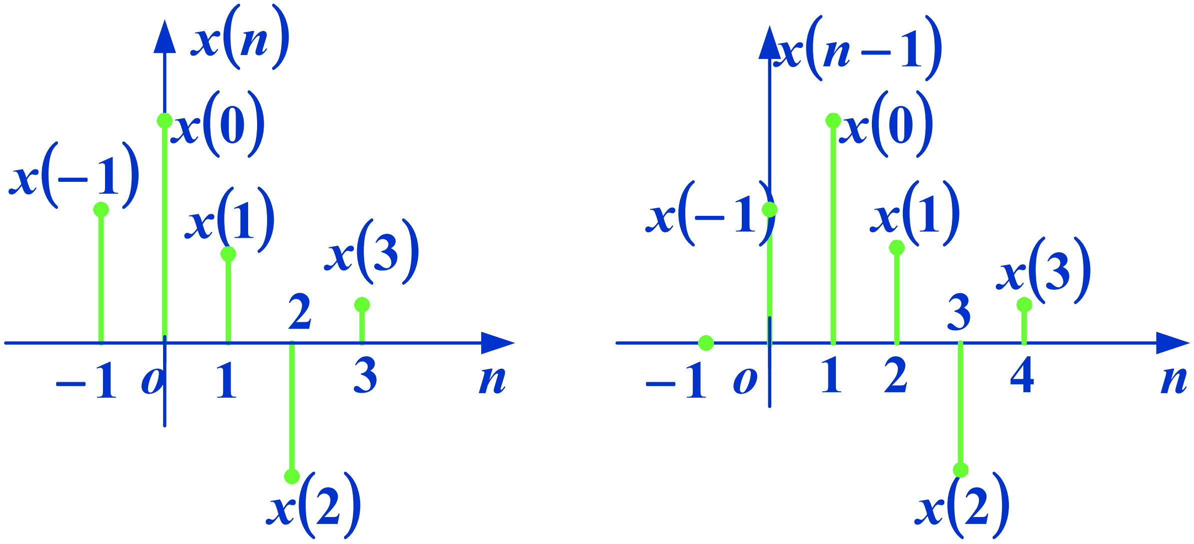
1．相加：$z(n)=x(n)+y(n)$

2．相乘：$z(n)=x(n)\cdot y(n)$

3．乘系数：$z(n)=ax(n)$

$m>0$

4．移位：$z(n)=x(n-m)$ 右移位；$z(n)=x(n+m)$ 左移位



5.2 离散时间信号——序列

离散信号的运算

5．倒置： $z(n) = x(-n)$

6．差分： 前向差分：$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$

后向差分：$\nabla x(n) = x(n) - x(n-1)$

7．累加：

$$z(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$$

8．重排（压缩、扩展）：

$$x(n) \to x(an)\ ,\text{或}\ x(n) \to x\left(\frac{n}{a}\right)$$

注意：有时需去除某些点或补足相应的零值。

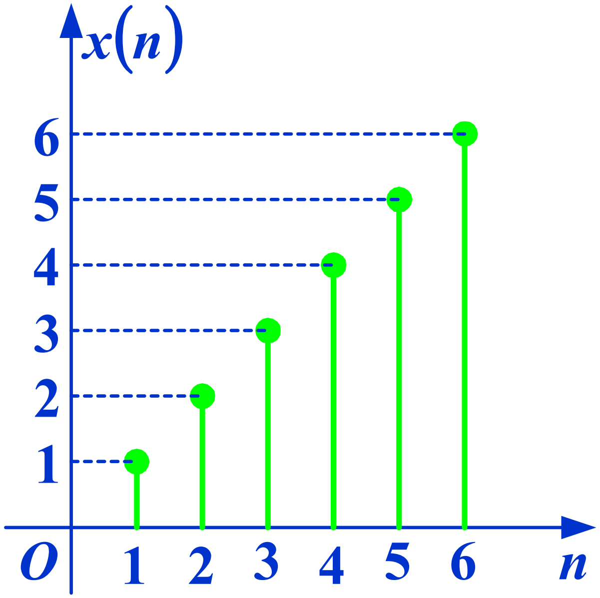
9．序列的能量 $E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x(n)\right|^2$

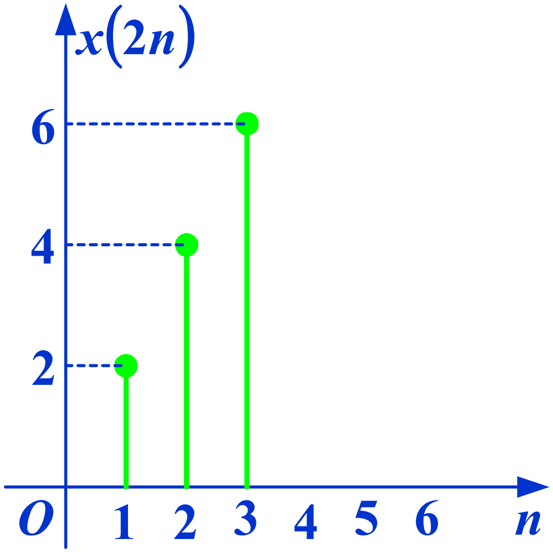
5.2 离散时间信号——序列

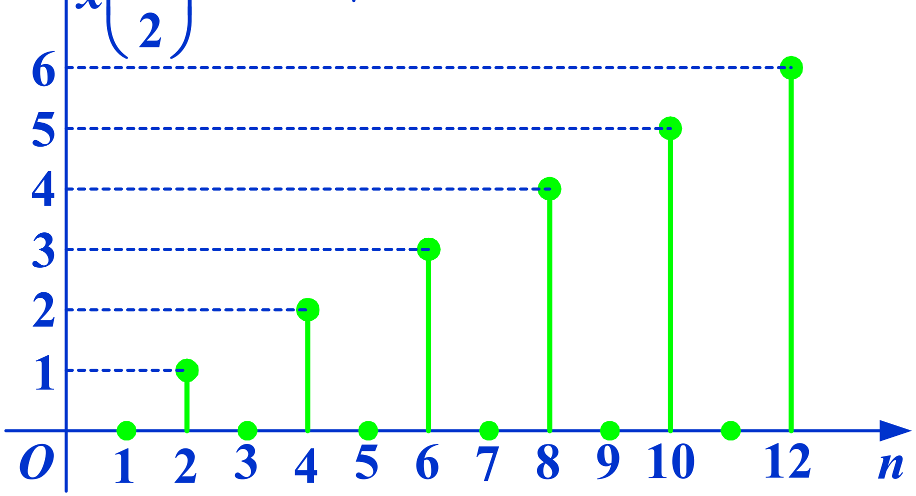
- **离散信号的运算**

例：已知 $x(n)$ 波形，求 $x(2n),x(\frac{n}{2})$ 波形。

解：



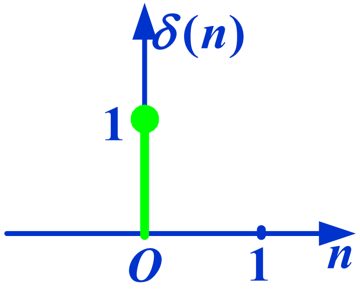




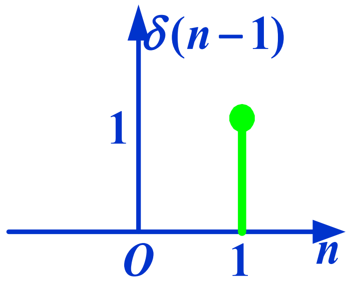
5.2 离散时间信号——序列

- **常用典型序列**

1. 单位样值信号 $$\delta(n)=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$$



时移性 $$\delta(n-j)=\begin{cases}0, n\neq j\\ 1, n=j\end{cases}$$



比例性 $c\delta(n), c\delta(n-j)$

抽样性 $f(n)\delta(n)=f(0)\delta(n)$

注意： $\delta(t)$用面积(强度)表示,($t\to 0$ ， 幅度为∞)；

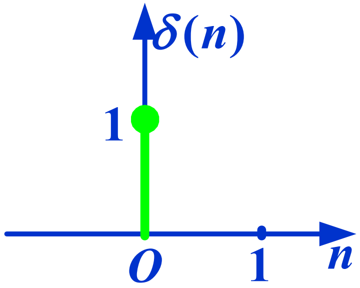
$\delta(n)$在$n=0$取有限值(不是面积)。

5.2 离散时间信号——序列

- 常用典型序列

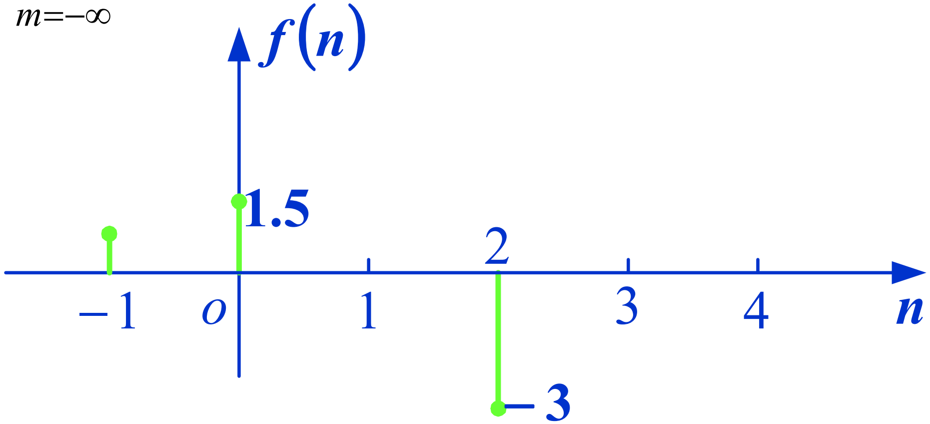
1. 单位样值信号

$$\delta(n)=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$$



利用单位样值信号表示任意序列

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)$$



$$x(n)=\{\cdots,\quad 1,\quad \underset{\substack{\uparrow\\ n=0}}{1.5},\quad 0,\quad -3,\quad 0,\quad 0,\quad \cdots\}$$

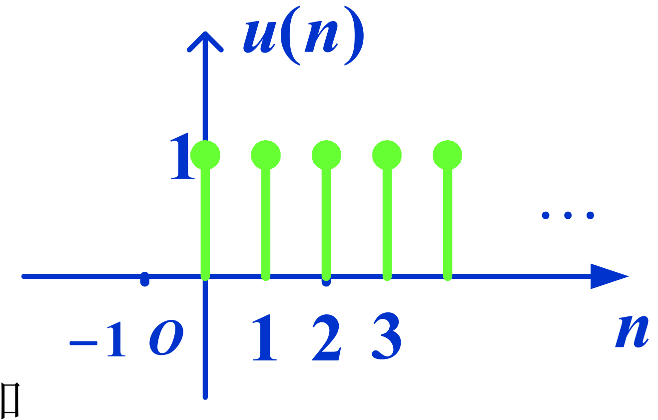
$$=\delta\left(n+1\right)+1.5\delta\left(n\right)-3\delta\left(n-2\right)$$

5.2 离散时间信号——序列

- **常用典型序列**

2．单位阶跃序列

$$u(n)=\begin{cases}1, & n\geq 0\\ 0, & n<0\end{cases}$$



$u(n)$ 可以看做是无数个单位样值序列之和

$$u(n)=\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)+\delta(n-3)+\cdots$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(n-k)$$

$$\delta(n)=u(n)-u(n-1)$$

注意：

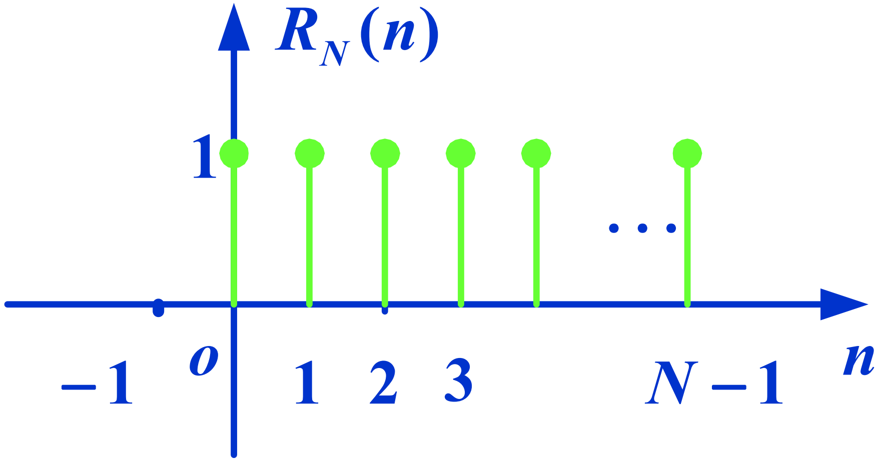
$\delta(n)$与$u(n)$之间是差分关系，而不是微商(导数)关系。

5.2 离散时间信号——序列

- 常用典型序列

3．矩形序列

$$R_N(n)=\begin{cases}1 & 0\le n\le N-1\\ 0 & n<0, n\ge N\end{cases}$$



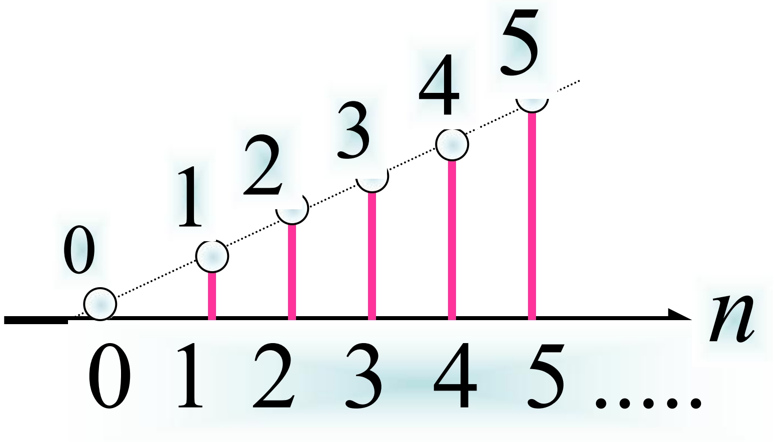
$$R_N(n)=u(n)-u(n-N)$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1}\delta(n-k)$$

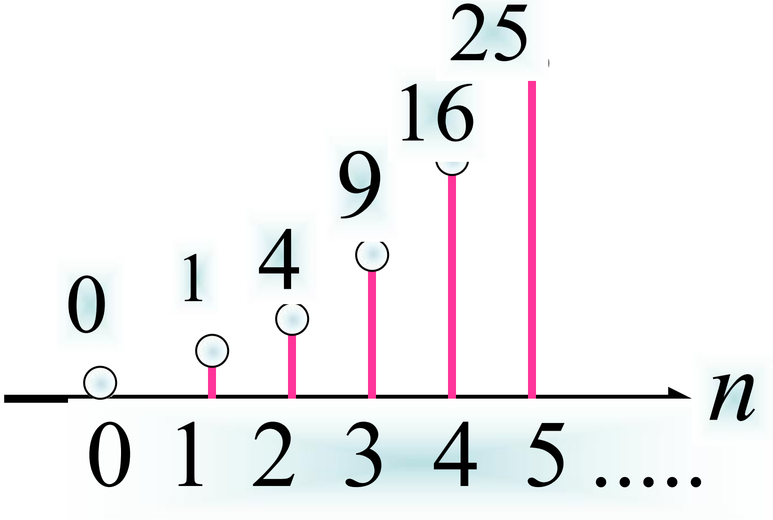
5.2 离散时间信号——序列

- 常用典型序列

4． 斜变序列 $R(n)=nu(n)$



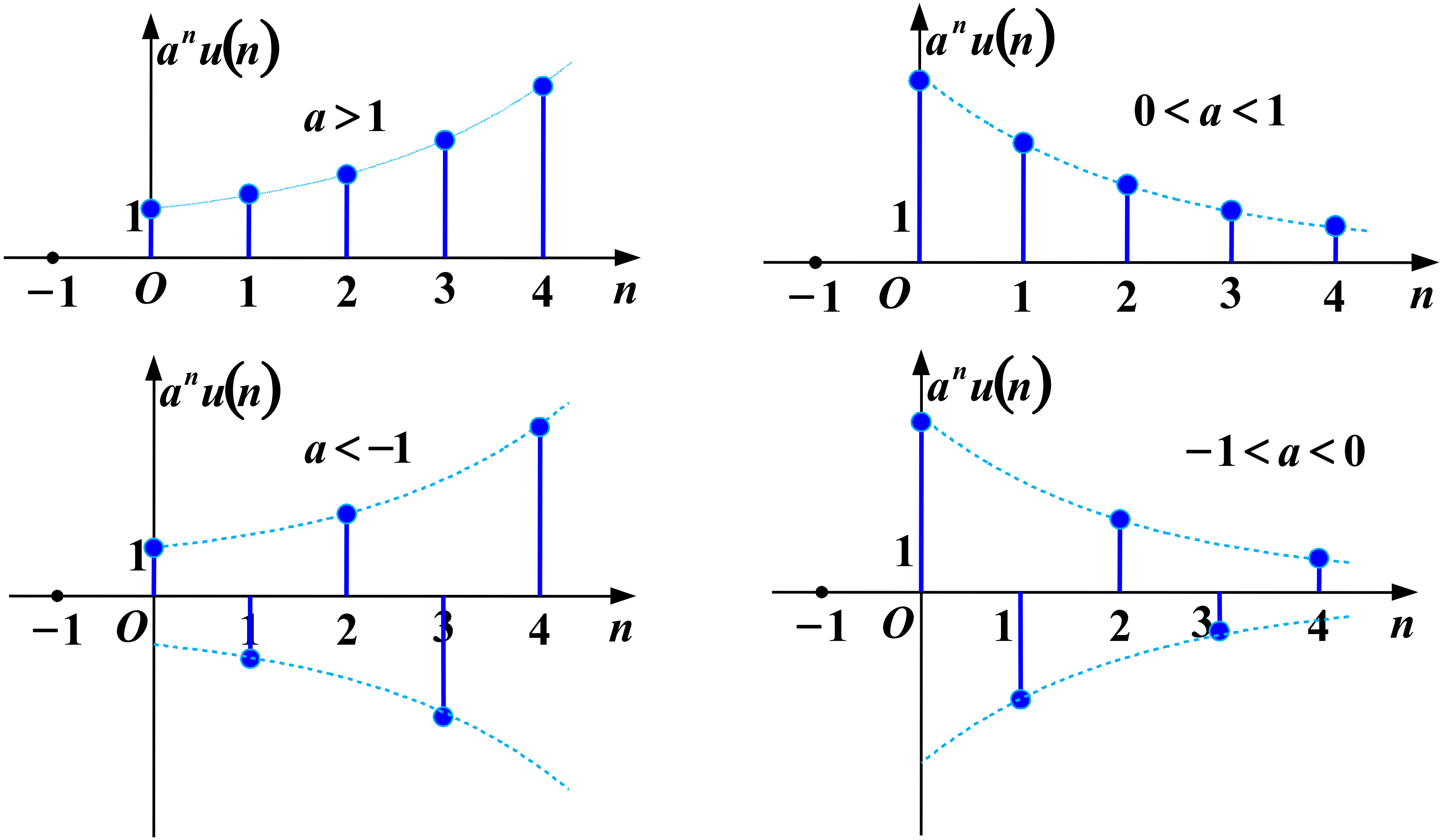
$r(n)=n^2u(n)$



5.2 离散时间信号——序列

常用典型序列

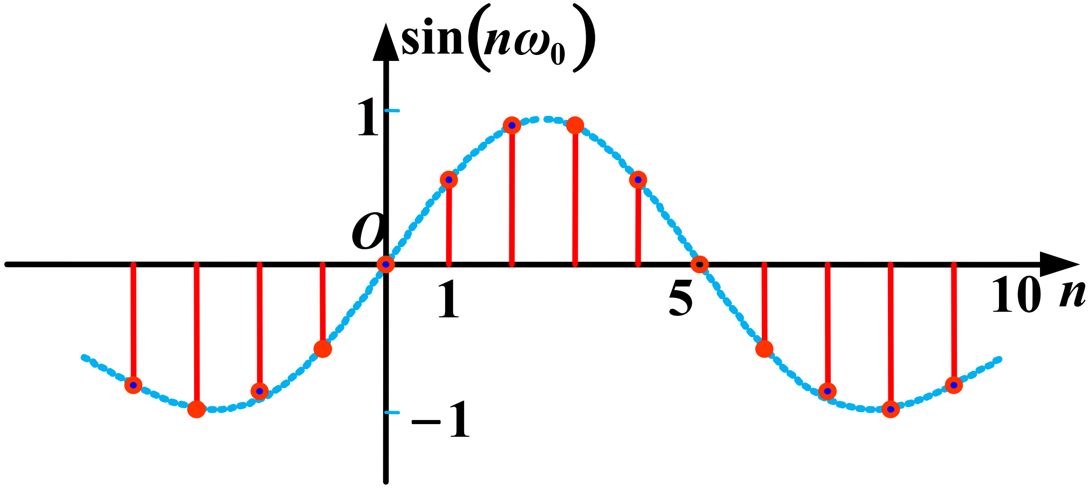
5．单边指数序列 $x(n)=a^{n}u(n)$



5.2 离散时间信号——序列

常用典型序列

6．正弦序列　　$x(n)=\sin(n\omega_0)$



ω_0：正弦序列的频率，序列值周期性重复的速率。

当 $\omega_0=\frac{2\pi}{10}$ 时，则序列每10个值重复一次正弦包络的数值。

若离散正弦序列 $x(n)=\sin(n\omega_0)$ 是周期序列，

则满足 $x(n+N)=x(n)$，N 为**正整数**，称为序列的**周期**。

5.2 离散时间信号——序列

常用典型序列

6. 正弦序列

正弦序列周期性判断：

① $\frac{2\pi}{\omega_0}=N, N$ 是**正整数**，则正弦序列是**周期**的。

$$\sin\left[\omega_0\left(n+N\right)\right]=\sin\left[\omega_0\left(n+\frac{2\pi}{\omega_0}\right)\right]=\sin\left(\omega_0 n+2\pi\right)=\sin\left(\omega_0 n\right)$$

② $\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{N}{m}, \frac{N}{m}$ 是**有理数**，则正弦序列是**周期**的，周期 $N=m\frac{2\pi}{\omega_0}$ 。

$$\sin\left[\omega_0\left(n+N\right)\right]=\sin\left[\omega_0\left(n+m\frac{2\pi}{\omega_0}\right)\right]=\sin\left(\omega_0 n+m\cdot 2\pi\right)=\sin\left(\omega_0 n\right)$$

③ $\frac{2\pi}{\omega_0}$ 是**无理数**，则正弦序列**是非周期**的。

找不到满足 $x\left(n+N\right)=x\left(n\right)$ 的 N 值，所以**是非周期**的。

5.2 离散时间信号——序列

- **常用典型序列**

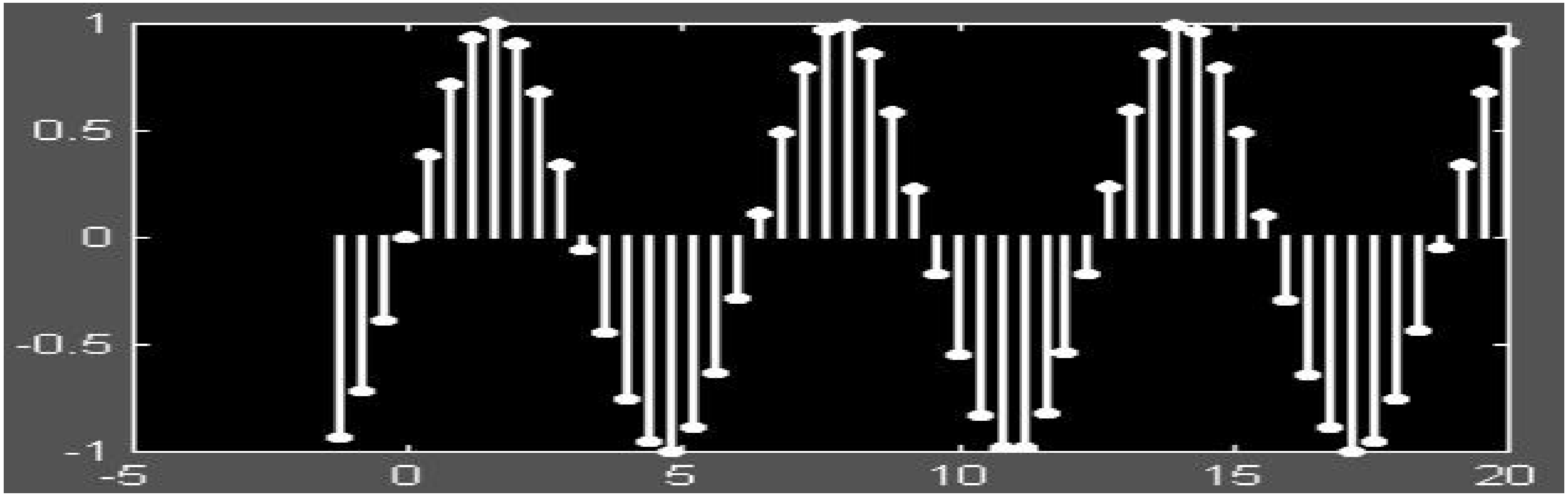
6．正弦序列

例：信号 $x(n)=\sin(0.4n)$ 是否为周期信号？

解：

$$\omega_0=0.4$$

$\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{2\pi}{0.4}=5\pi$ 是无理数，所以为非周期序列。



5.2 离散时间信号——序列

- **常用典型序列**

7. 复指数序列 $x(n)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n}=\cos\omega_0 n+\mathrm{j}\sin\omega_0 n$

复序列可以用极坐标表示为

$$x(n)=|x(n)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\arg[x(n)]}$$

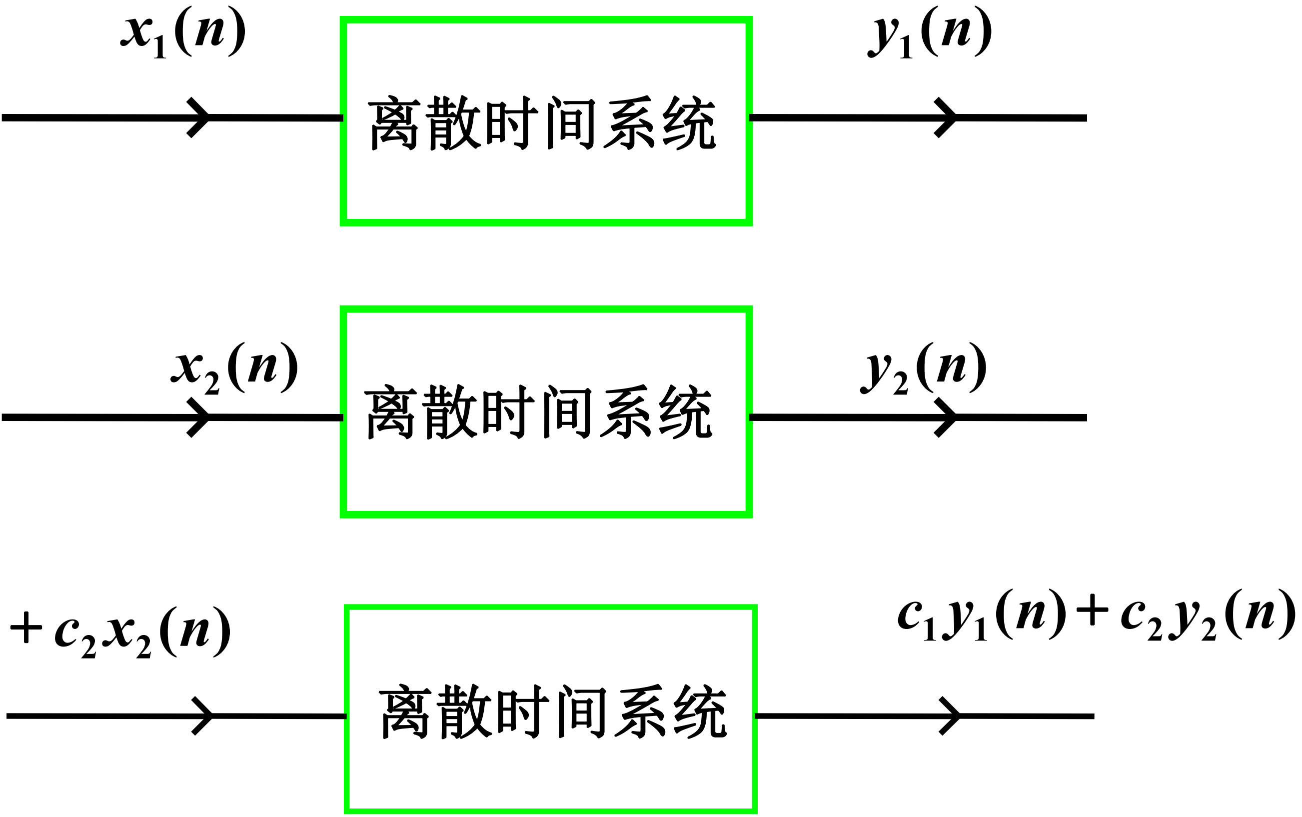
复指数序列

$$|x(n)|=1,\arg[x(n)]=\omega_0 n$$

5.3 离散时间系统的数学模型

- 线性时不变系统

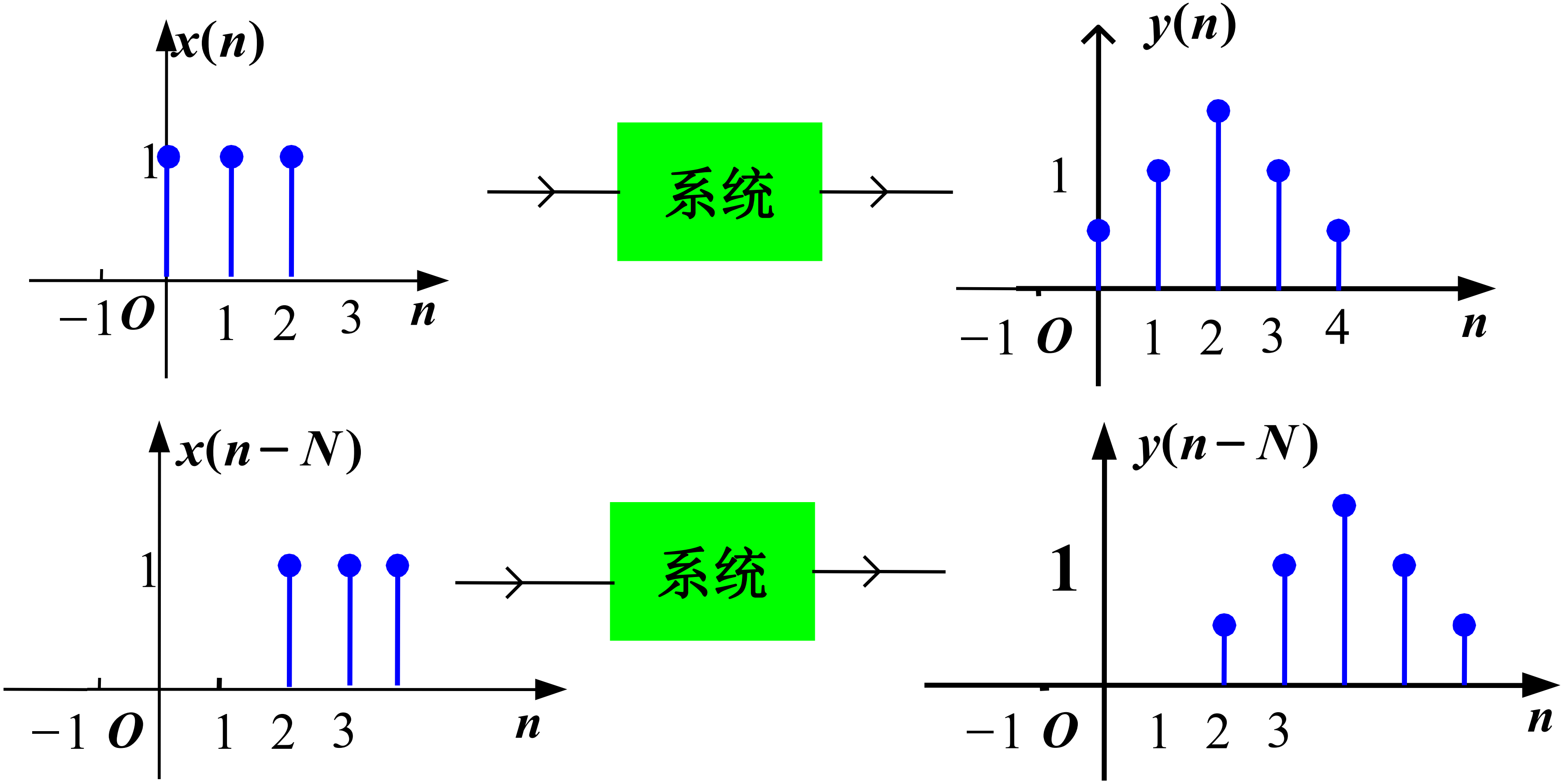
线性：均匀性、可加性均成立



5.3 离散时间系统的数学模型

- 线性时不变系统

时不变： $x(n) \to y(n), x(n-N) \to y(n-N)$



5.3 离散时间系统的数学模型

- **列写差分方程**

1. 由实际问题得到差分方程

例如：

$y(n)$表示一个国家在第n年的人口数

a(常数)：出生率

b(常数): 死亡率

设$x(n)$是国外移民的净增数

则该国在第$n+1$年的人口总数为：

$$y(n+1)=y(n)+ay(n)-by(n)+x(n)$$

$$=(a-b+1)y(n)+x(n)$$

5.3 离散时间系统的数学模型

- 列写差分方程

2. 由微分方程导出差分方程

$$\frac{dy(t)}{dt}=ay(t)+f(t)$$

$y(t)$：输出; $f(t)$：输入; 时间间隔：T

后向差分：$$\frac{dy(t)}{dt}\approx\frac{y(t)-y(t-T)}{T}$$

前向差分：$$\frac{dy(t)}{dt}\approx\frac{y(t+T)-y(t)}{T}$$

若采用后差，则 $$\frac{y(t)-y(t-T)}{T}=ay(t)+f(t)$$

5.3 离散时间系统的数学模型

- 列写差分方程

2. 由微分方程导出差分方程

若采用后差，则 $\dfrac{y(t)-y(t-T)}{T}=ay(t)+f(t)$

若在 $t=nT$ 各点取得样值，则

$$y(t)=y(nT)\to y(n)$$

$$f(t)=f(nT)\to f(n)$$

$$\frac{y(n)-t(n-1)}{T}=ay(n)+f(n)$$

$$\therefore y(n)=\frac{1}{1-aT}y(n-1)+\frac{T}{1-aT}f(n)$$

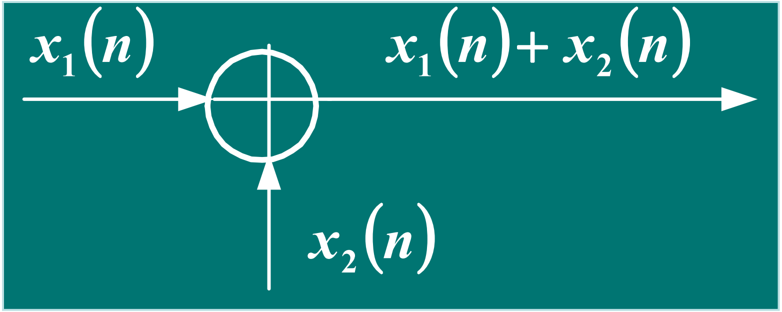
当前输出　　前一个输出　　输入

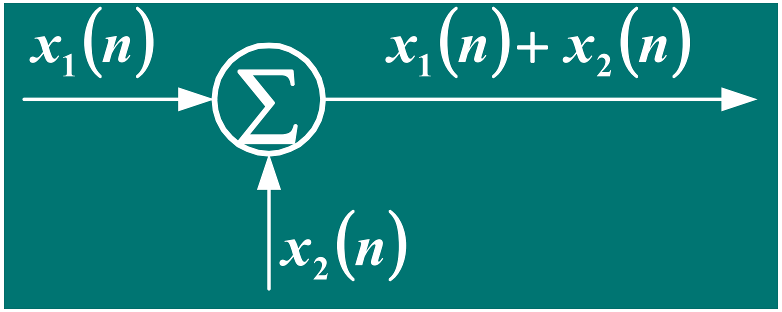
5.3 离散时间系统的数学模型

- 列写差分方程

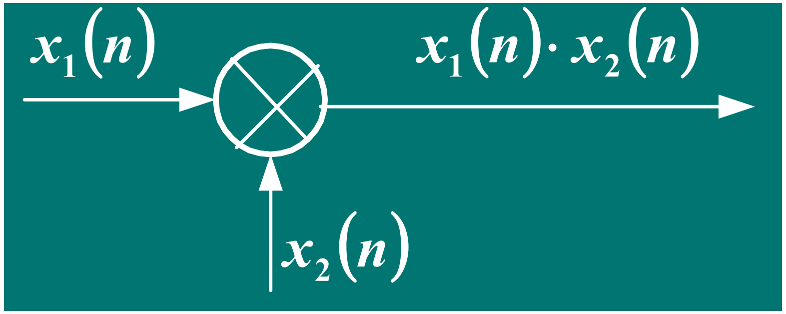
3. 由系统框图写差分方程

加法器：





乘法器：



5.3 离散时间系统的数学模型

- 列写差分方程

3. 由系统框图写差分方程

标量乘法器

延时器

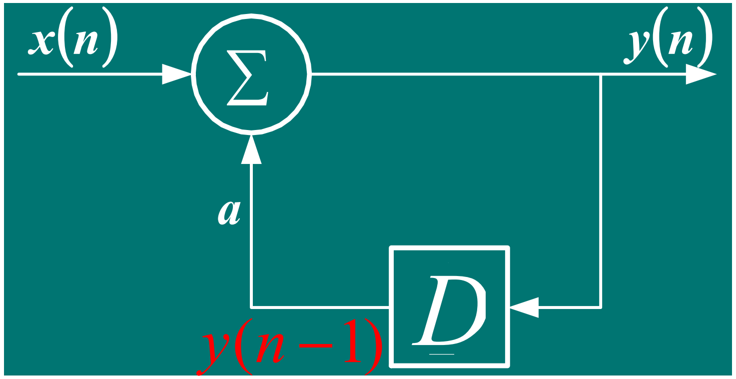
单位延时实际是一个移位寄存器，把前一个离散值顶出来，递补。

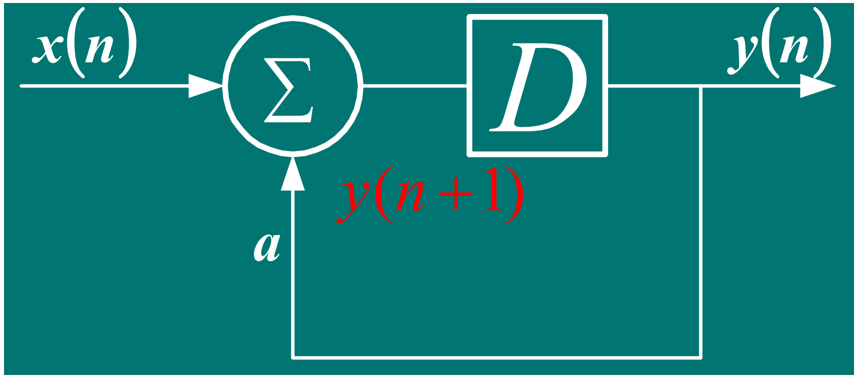
5.3 离散时间系统的数学模型

- 列写差分方程

3. 由系统框图写差分方程

例：框图如下图，写出差分方程。





解：

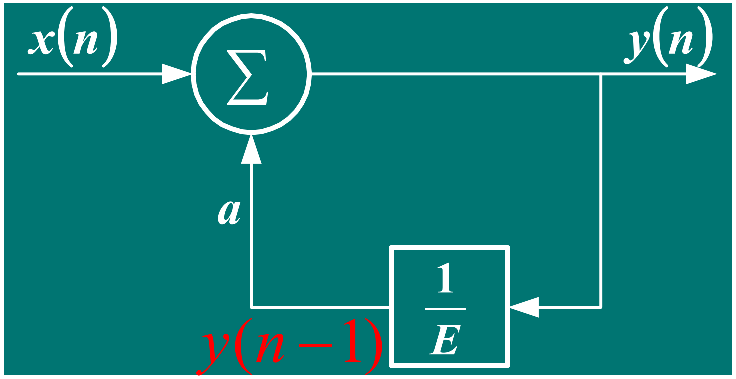
$$y(n) = x(n) + ay(n-1) \qquad\qquad y(n+1) = x(n) + ay(n)$$

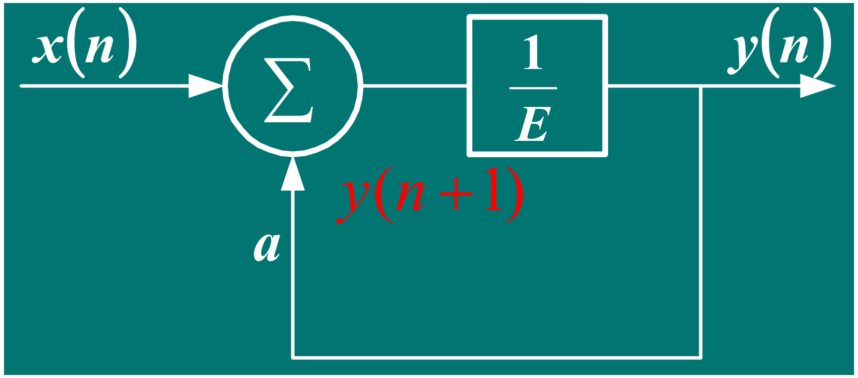
5.3 离散时间系统的数学模型

- 列写差分方程

3. 由系统框图写差分方程

例：框图如下图，写出差分方程。





解：

$$y(n)=x(n)+ay(n-1) \qquad y(n+1)=x(n)+ay(n)$$

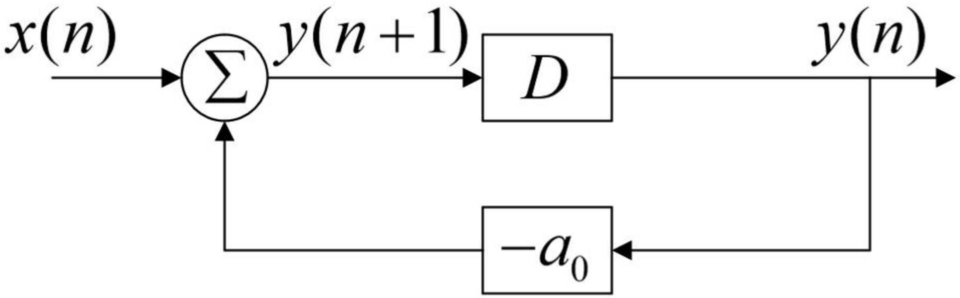
5.3 离散时间系统的数学模型

- 列写差分方程

4. 由差分方程画系统框图

例：差分方程为 $y(n+1)+a_0y(n)=x(n)$，画出系统框图。

解：$$y(n+1)=-a_0y(n)+x(n)$$



5.3 离散时间系统的数学模型

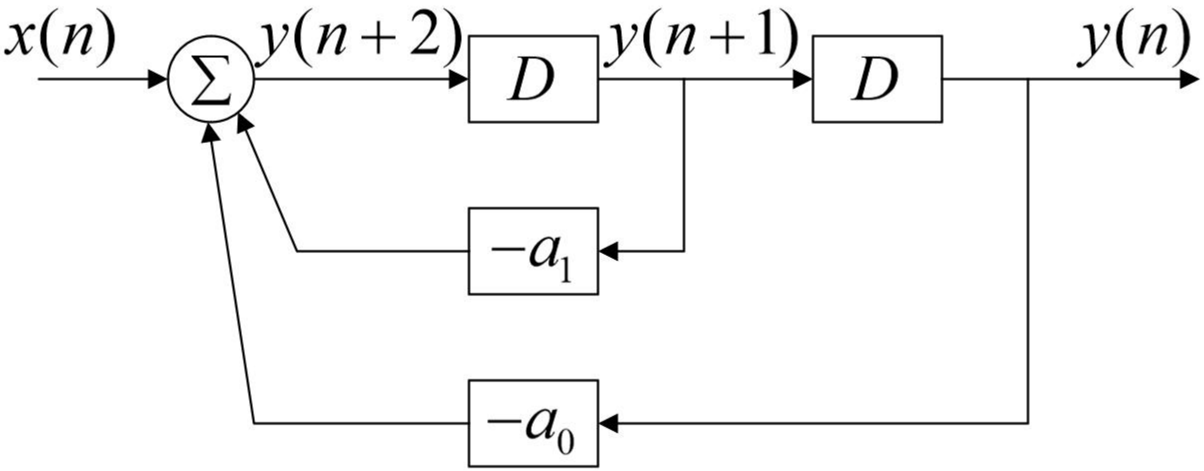
- 列写差分方程

4. 由差分方程画系统框图

例：差分方程为$y(n+2)+a_1y(n+1)+a_0y(n)=x(n)$，画出系统框图。

解：

$$y(n+2)=-a_1y(n+1)-a_0y(n)+x(n)$$



5.3 离散时间系统的数学模型

■ 列写差分方程

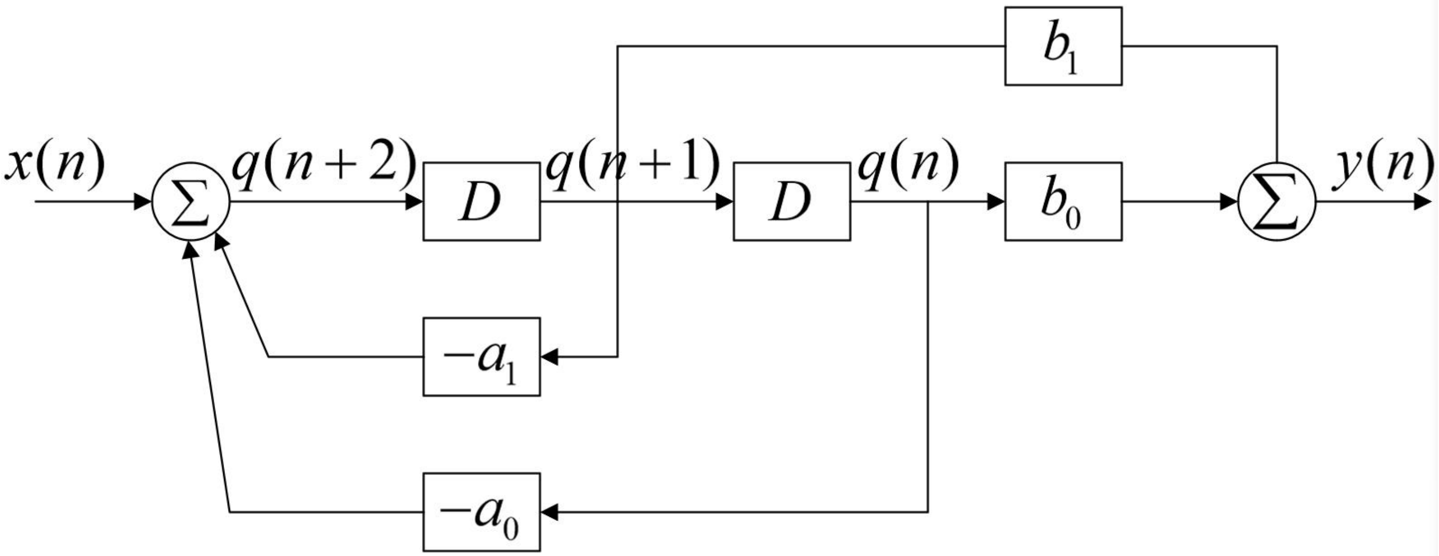
4. 由差分方程画系统框图

例：差分方程为 $y(n+2)+a_1y(n+1)+a_0y(n)=b_1x(n+1)+b_0x(n)$，画出系统框图。

解：

$$q(n+2)+a_1q(n+1)+a_0q(n)=x(n)$$

$$y(n)=b_1q(n+1)+b_0q(n)$$



5.3 离散时间系统的数学模型

差分方程的特点

(1) 输出序列的第n个值不仅决定于同一瞬间的输入样值，而且还与前面输出值有关，每个输出值必须依次保留。

(2) 差分方程的阶数：差分方程中函数的最高和最低序号差数为阶数。如果一个系统的第*n*个输出决定于刚过去的几个输出值及输入值，那么描述它的差分方程就是几阶的

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

(3) 微分方程可以用差分方程来逼近，微分方程解是精确解，差分方程解是近似解，两者有许多类似之处。

(4) 差分方程描述离散时间系统，输入序列与输出序列间的运算关系与系统框图有对应关系，应该会写会画。

5.4 常系数线性差分方程的求解

1. 迭代法

2. 时域经典法：齐次解+特解

3. 零输入响应+零状态响应
   利用卷积求系统的零状态响应

4. z变换法→反变换→$y(n)$

5.4 常系数线性差分方程的求解

■ 迭代法

差分方程本身是一种递推关系，迭代法是解差分方程的基础方法，但得不到解析解。

例：已知 $y(n)=3y(n-1)+u(n)$，且 $y(-1)=0$ ，求解方程。

解：

$$n=0 \quad y(0)=3y(-1)+u(0)=1$$

$$n=1 \quad y(1)=3y(0)+u(1)=4$$

$$n=2 \quad y(2)=3y(1)+u(2)=13$$

$$n=3 \quad y(3)=3y(2)+u(3)=40$$

由递推关系，可得输出值

$$y(n)=\left\{\underset{\substack{\uparrow\\ n=0}}{1}, \quad 4, \quad 13, \quad 40, \quad \cdots\right\}$$

5.4 常系数线性差分方程的求解

- **时域经典法**

常系数线性差分方程的一般形式可表示为：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

则其对应的齐次方程形式为：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = 0$$

对于一阶齐次差分方程 $y(n) - ay(n-1) = 0$ ，

$$a = \frac{y(n)}{y(n-1)} \qquad \therefore y(n) = Ca^n$$

或由特征方程 $r - a = 0$ 可得 $r = a$ ，$y(n) = Cr^n = Ca^n$

其中，C 为待定系数，由边界条件决定。

5.4 常系数线性差分方程的求解

时域经典法

- **齐次解**

一般齐次差分方程$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k)=0$ 的特征方程$\sum_{k=0}^{N} a_k r^{N-k}=0$的特征根情况：

① 特征根无重根

$$y(n)=C_1(r_1)^n+C_2(r_2)^n+\cdots+C_N(r_N)^n=\sum_{k=1}^{N} C_k(r_k)^n$$

例：求解二阶差分方程$y(n)-5y(n-1)+6y(n-2)=0, y(0)=2, y(1)=1$。

解：特征方程： $r^2-5r+6=0$ 特征根： $r_1=2, r_2=3$

齐次解： $y(n)=C_1 2^n+C_2 3^n$

求待定系数： $n=0 \quad y(0)=C_1+C_2=2$

$n=1 \quad y(1)=2C_1+3C_2=1$

$\Rightarrow C_1=5, C_2=-3$

$$\therefore y(n)=5(2)^n-3(3)^n$$

5.4 常系数线性差分方程的求解

- **时域经典法**
  - 齐次解

② 特征根有重根　　**假设特征根 r_1 为m重根**

$$y(n)=[C_{10}+C_{11}n+C_{12}n^{2}+\cdots+C_{1(m-1)}n^{m-1}](r_1)^{n}$$

例：求解二阶差分方程 $y(n)+6y(n-1)+12y(n-2)+8y(n-3)=0$。

解：特征方程：$r^{3}+6r^{2}+12r+8=0$

特征根：　$r_{1,2,3}=-2$

齐次解：　$y(n)=(C_{10}+C_{11}n+C_{12}n^{2})(-2)^{n}$

5.4 常系数线性差分方程的求解

- **时域经典法**
  - 齐次解

③ 特征根有共轭复根　　$r_1 = Me^{j\phi}，\ r_2 = Me^{-j\phi}$

$$y(n) = C_1(r_1)^n + C_2(r_2)^n = C_1\left(M\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}\right)^n + C_2\left(M\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi}\right)^n$$

$$= C_1M^n\left(\cos n\phi + \mathrm{j}\sin n\phi\right) + C_2M^n\left(\cos n\phi - \mathrm{j}\sin n\phi\right)$$

$$= PM^n\cos n\phi + QM^n\sin n\phi$$

其中，P、Q为待定系数。

$M = 1$　　$y(n)$为等幅正弦序列

$M > 1$　　$y(n)$为增幅正弦序列

$M < 1$　　$y(n)$为减幅正弦序列

5.4 常系数线性差分方程的求解

- **时域经典法**
  - 齐次解

例：求差分方程 $y(n)-2y(n-1)+2y(n-2)-2y(n-3)+y(n-4)=0$ 的齐次解，$y(1)=1, y(2)=0, y(3)=1, y(5)=1$ 。

解：特征方程：$r^4-2r^3+2r^2-2r+1=0$

特征根：$r_{1,2}=1, r_{3,4}=\pm j$

齐次解：
$$y(n)=(C_1+C_2n)(1)^n+C_3(j)^n+C_4(-j)^n$$
$$=C_1+C_2n+C_3e^{j\frac{n\pi}{2}}+C_4e^{-j\frac{n\pi}{2}}$$
$$=C_1+C_2n+P\cos(\tfrac{n\pi}{2})+Q\sin(\tfrac{n\pi}{2})$$

求待定系数：$y(1)=C_1+C_2+Q=1 \quad y(2)=C_1+2C_2-P=0$

$y(3)=C_1+3C_2-Q=1 \quad y(5)=C_1+5C_2+Q=1$

$$\Rightarrow C_1=1, C_2=0, P=1, Q=0 \qquad \therefore y(n)=1+\cos(\frac{n\pi}{2})$$

5.4 常系数线性差分方程的求解

- **时域经典法**
  - 特解

输入	输出
$x(n)=e^{an}$	$y(n)=Ae^{an}$
$x(n)=e^{j\omega n}$	$y(n)=Ae^{j\omega n}$
$x(n)=\cos(\omega n)$	$y(n)=A\cos(\omega n+\theta)$
$x(n)=\sin(\omega n)$	$y(n)=A\sin(\omega n+\theta)$
$x(n)=n^{k}$	$y(n)=A_{k}n^{k}+A_{k-1}n^{k-1}+\cdots+A_{1}n+A_{0}$
$x(n)=A$	$y(n)=C$
$x(n)=(r)^{n}$	$y(n)=C(r)^{n}$
$x(n)=(r)^{n}$ (r是特征根)	$y(n)=(C_{1}+C_{2}n)(r)^{n}$

5.4 常系数线性差分方程的求解

- **时域经典法**

例：差分方程 $y(n)+2y(n-1)=5u(n)$，$y(-1)=1$，求全解。

解：特征方程：$r+2=0$　　特征根：$r=-2$

齐次解：$y_h(n)=C_1(-2)^n$

特解：$\because x(n)=5u(n)$ 在 $n\geq 0$ 时恒为5（常数）

$\therefore y_p(n)=C$

特解代入原方程得：$C+2C=5\Rightarrow C=\dfrac{5}{3}$

全解：$y(n)=y_h(n)+y_p(n)=C_1(-2)^n+\dfrac{5}{3}$

由 $y(-1)=1$ 迭代可得 $y(0)=5u(0)-2y(-1)=3$

$$\therefore y(0)=C_1(-2)^0+\frac{5}{3}=3 \quad \Rightarrow C_1=\frac{4}{3}$$

$$\therefore y(n)=\frac{4}{3}(-2)^n+\frac{5}{3} \quad (n\geq 0)$$

5.4 常系数线性差分方程的求解

■ 零输入响应与零状态响应

零输入响应：输入为零，差分方程为齐次方程

齐次解：　$C(r)^n$

C 由初始状态定（相当于0-的条件）

零状态响应：初始状态为零，即 $y(-1) = y(-2) = \ldots = 0$

求解方法：

① 经典法：　齐次解 ＋ 特解

② 卷积法

5.4 常系数线性差分方程的求解

零输入响应与零状态响应

例：线性时不变系统差分方程为 $y(n)+3y(n-1)+2y(n-2)=x(n)+x(n-1)$ 已知 $x(n)=(-2)^n u(n), y(0)=y(1)=0,$ 求系统的零输入响应。

解：零输入响应 $y_{zi}(n)$ 是当 $x(n)=0$ 时的解。

$$y(n)+3y(n-1)+2y(n-2)=0$$

特征方程： $r^2+3r+2=0$

特征根： $r_1=-2, r_2=-1$

$$\therefore y_{zi}(n)=C_1(-2)^n+C_2(-1)^n$$

$n=1$ $\quad y(1)+3y(0)+2y(-1)=x(1)-x(0)=(-2)^1u(1)+(-2)^0u(0)$

$$0+0+2y(-1)=(-2)+1=-1 \qquad \therefore y(-1)=-\frac{1}{2}$$

$n=0$ $\quad y(0)+3y(-1)+2y(-2)=x(0)+x(-1)$

$$0+3y(-1)+2y(-2)=1 \qquad \therefore y(-2)=\frac{5}{4}$$

5.4 常系数线性差分方程的求解

■ 零输入响应与零状态响应

例：线性时不变系统差分方程为 $y(n)+3y(n-1)+2y(n-2)=x(n)+x(n-1)$ 已知 $x(n)=(-2)^n u(n), y(0)=y(1)=0,$ 求系统的零输入响应。

解：

$$y_{zi}(n)=C_1(-2)^n+C_2(-1)^n \qquad y(-1)=-\frac{1}{2} \qquad y(-2)=\frac{5}{4}$$

$$\begin{cases} y_{\text{zi}}(-1)=C_1(-2)^{-1}+C_2(-1)^{-1}=-\dfrac{1}{2} \\ y_{\text{zi}}(-2)=C_1(-2)^{-2}+C_2(-1)^{-2}=\dfrac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=-3 \\ C_2=2 \end{cases}$$

$$\therefore y_{\text{zi}}(n)=-3(-2)^n+2(-1)^n$$

5.5 离散时间系统的单位样值响应

单位样值响应

单位样值响应，或单位冲激响应，即在$\delta(n)$作用下系统的**零状态响应**，表示为$h(n)$， $h(-k)=0(k=1,2,3,\cdots)$。

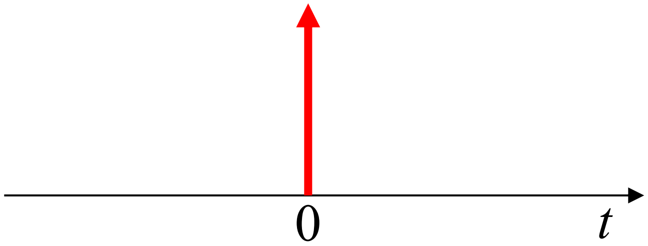
$\delta(t)$ 和 $\delta(n)$ 的定义和区别：

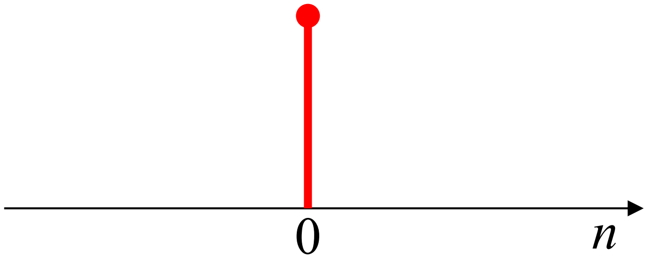
$\delta(t)$ 的定义：

$$\begin{cases} \delta(t)=0 & (t\neq 0) \\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1 & \end{cases}$$

$\delta(n)$ 的定义：

$$\delta(n)=\begin{cases} 1 & (n=0) \\ 0 & (n\neq 0) \end{cases}$$





5.5 离散时间系统的单位样值响应

- 求系统单位样值响应

一般时域经典方法求 $h(n)$

将 $\delta(n)$ 转化为起始条件，于是齐次解即零输入响应就是单位样值响应 $h(n)$ 。

① 在 $n=0$ 时，$\delta(n)=1$ 接入的激励转化为起始条件；

② 在 $n\neq 0$ 时，$\delta(n)=0$ 接入的激励用线性时不变性质来进行计算；

③ 在 $n>0$ 时，系统的单位响应与该系统的零输入响应的形式相同。

5.5 离散时间系统的单位样值响应

求系统单位样值响应

例：求以下系统的单位样值响应。

$$y(n)-3y(n-1)+3y(n-2)-y(n-3)=x(n)$$

解：

特征方程： $r^3-3r^2+3r-1=0$

特征根： $r_{1,2,3}=1$

齐次解： $\therefore y_h(n)=(C_0+C_1n+C_2n^2)(1)^n=C_0+C_1n+C_2n^2$

$$\because \delta(0)=1, x(0)=1, x(-1)=0, x(-2)=0, \cdots$$

$$h(-1)=0, h(-2)=0, \cdots$$

$$\therefore h(0)=1$$

$$\therefore C_0=1, C_1=\frac{3}{2}, C_2=\frac{1}{2}$$

$$h(n)=\frac{1}{2}(n^2+3n+2)u(n) \qquad n>0$$

$$h(n)=0 \qquad n<0$$

这里，单位样值的激励作用等效为一个起始条件 $h(0)=1$

5.5 离散时间系统的单位样值响应

求系统单位样值响应

例：求以下系统的单位样值响应。

$$y(n)-5y(n-1)+6y(n-2)=x(n)-3x(n-2)$$

解：

特征方程：　$r^2-5r+6=0$

特征根：　$r_1=2, r_2=3$

齐次解：　$\therefore y_h(n)=C_1 2^n+C_2 3^2$

只考虑$x(n)$　$\because h(0)=1, h(-1)=0, \cdots$

$$\therefore C_1=-2, C_2=3$$

$$h_1(n)=(3^{n+1}-2^{n+1})u(n)$$

$$h_2(n)=-3h_1(n-2)$$

$$=-3(3^{n-1}-2^{n-1})u(n-2)$$

利用线性时不变特性

$$h(n)=h_1(n)+h_2(n)$$

$$=(3^{n+1}-2^{n+1})u(n)-3(3^{n-1}-2^{n-1})u(n-2)$$

5.5 离散时间系统的单位样值响应

求系统单位样值响应

利用已知的阶跃响应求 $h(n)$：

例： 已知因果系统是一个二阶常系数差分方程，并已知当$x(n)=u(n)$时的响应为 $g(n)=(2^n+3\times5^n+10)u(n)$,

（1）求系统的单位样值响应；

（2）若系统为零状态，求此二阶差分方程。

解： (1) $\because g(n)=(2^n+3\times5^n+10)u(n)$

$$\therefore h(n)=g(n)-g(n-1)$$

$$=(2^{n-1}+12\times5^{n-1})u(n-1)+14\delta(n)$$

(2) 设此二阶差分方程的一般表达式为：

$$y(n)+a_1y(n-1)+a_2y(n-2)=b_0x(n)+b_1x(n-1)+b_2x(n-2)$$

特征方程： $r^2+a_1r+a_2=0$

特征根： $r_1=2,r_2=5 \quad \therefore a_1=-7,a_2=10$

5.5 离散时间系统的单位样值响应

求系统单位样值响应

利用已知的阶跃响应求 ***h*(*n*)**：

例： 已知因果系统是一个二阶常系数差分方程，并已知当$x(n)=u(n)$时的响应为 $g(n)=(2^n+3\times5^n+10)u(n)$,

（1）求系统的单位样值响应；

（2）若系统为零状态，求此二阶差分方程。

解：

$$h(n)-7h(n-1)+10h(n-2)=b_0\delta(n)+b_1\delta(n-1)+b_2\delta(n-2)$$

$$h(n)=(2^{n-1}+12\times5^{n-1})u(n-1)+14\delta(n)$$

$$h(0)=14, h(1)=13, h(2)=62$$

$n=0$ $\quad h(0)=b_0=14$

$n=1$ $\quad h(1)=7h(0)+b_1=13$

$n=2$ $\quad h(2)=7h(1)-10h(0)+b_2=62$

$b_0=14$

$b_1=13-7\times14=-85$

$b_3=62-7\times13+10\times14=111$

$$\therefore y(n)-7y(n-1)+10y(n-2)=14x(n)-85x(n-1)+111x(n-2)$$

5.5 离散时间系统的单位样值响应

- **根据单位样值响应分析系统的因果性和稳定性**

因果系统：输出变化不领先于输入变化的系统。

线性时不变系统是因果系统的充要条件：

$$n<0 \quad h(n)=0$$

稳定性的充要条件：若输入有界，则输出必定有界。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|h(n)\right|=P<\infty$$

单位样值响应的绝对和为有限值（绝对可和）收敛。

5.5 离散时间系统的单位样值响应

■ 根据单位样值响应分析系统的因果性和稳定性

例：某线性时不变系统的单位样值响应为 $h(n)=a^n u(n)$, 试判断其因果性和稳定性。

解：

（1） 因果性

因为 $h(n)$ 是单边信号，有起因，即 $n<0$ 时，$h(n)=0$

所以系统是因果的。

（2） 稳定性

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|h(n)\right| = \sum_{n=0}^{\infty}\left|a^n\right| = \begin{cases}\dfrac{1}{1-|a|} & |a|<1\\ \infty & |a|\geq 1\end{cases}$$

所以，当 $|a|<1$ 时，$h(n)$ 是收敛的，

即 $|a|<1$ 时，系统是稳定的。

5.6 卷积(卷积和)

卷积和定义

任意序列 $x(n)$ 可表示为$\delta(n)$及其移位的加权线性组合：

$$x(n)=\cdots+x(-1)\delta(n+1)+x(0)\delta(n)+x(1)\delta(n-1)+\cdots+x(m)x(n-m)+\cdots$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)$$

$$\boxed{\therefore y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)}=x(n)*h(n)$$

系统对$x(n)$的响应 = 每一样值产生的响应在各处由$x(m)$ 的加权和。

卷积和公式表明：

$h(n)$将输入输出联系起来，即零状态响应 $=x(n)*h(n)$ 。

5.6 卷积(卷积和)

离散卷积的性质

1. 交换律

$$x(n)*h(n)=h(n)*x(n)$$

2. 结合律

$$x(n)*h_1(n)*h_2(n)=x(n)*[h_1(n)*h_2(n)]$$

3. 分配律

$$x(n)*\left[h_1(n)+h_2(n)\right]=x(n)*h_1(n)+x(n)*h_2(n)$$

4. $x(n)*\delta(n)=x(n)$

不存在微分、积分性质。

5.6 卷积(卷积和)

离散卷积的计算

$$x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)$$

m 的范围由 $x(n)$ 和 $h(n)$ 共同决定。

离散卷积的计算过程：序列倒置 -> 移位 -> 相乘 -> 求和。

1. 解析法
2. 图解法
3. 对位相乘求和法求卷积
4. 利用性质

5.6 卷积(卷积和)

- **离散卷积的计算**

$y(n)$ 的元素个数？

$x(n) \quad n_A$

$h(n) \quad n_B$

$y(n) \quad n_C = n_A + n_B - 1$

$x(n) \quad n_1 \le n \le n_2$

$h(n) \quad n_3 \le n \le n_4$

$y(n) \quad n_1 + n_3 \le n \le n_2 + n_4$

例如：

$x(n)$: $0 \le n \le 3$ 4个元素

$h(n)$: $0 \le n \le 4$ 5个元素

$y(n)$: $0 \le n \le 7$ 8 个元素

5.6 卷积(卷积和)

- **离散卷积的计算（解析法）**

例：已知 $x(n)=\alpha^n u(n)\ \ (0<\alpha<1), h(n)=u(n)$，求卷积 $y(n)=x(n)*h(n)$ 。

解：

$$y(n)=x(n)*h(n)\ \ =\sum_{m=-\infty}^{\infty}\alpha^m u(m)u(n-m)$$

要点：
定上下限

$m\geq 0,$

$n-m\geq 0,$

$n\geq 0$

$$=(\sum_{m=0}^{n}\alpha^m)\cdot u(n)$$

$$=(\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha})\cdot u(n)$$

当 $n\to\infty$ 时，

$$y(n)=\frac{1}{1-\alpha}$$

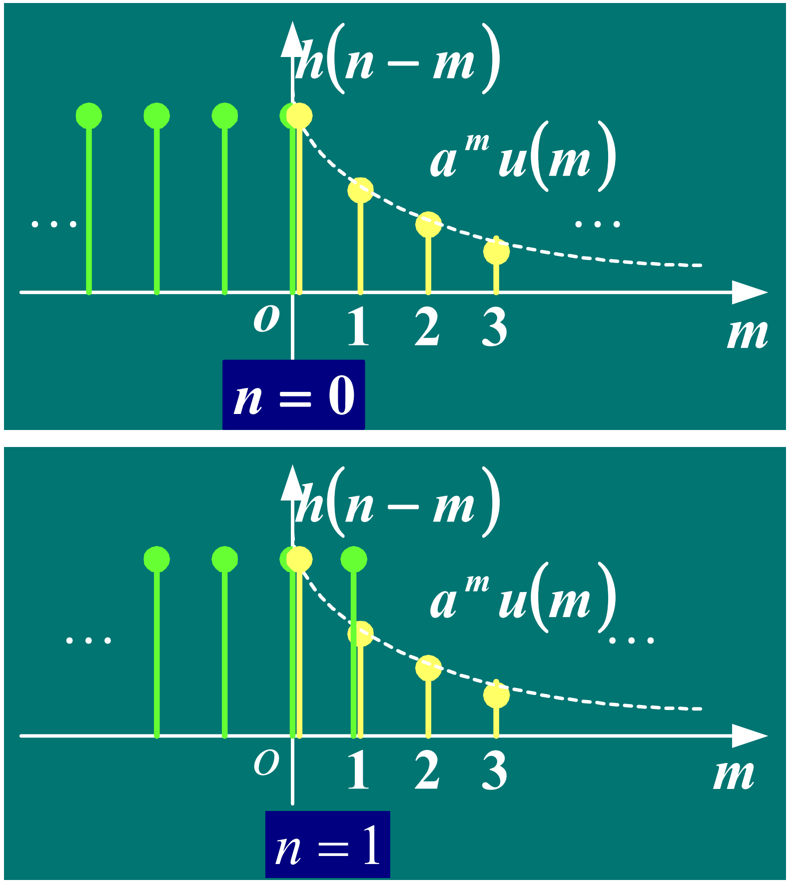
5.6 卷积(卷积和)

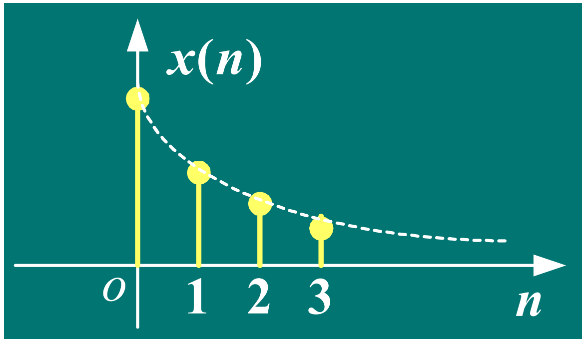
离散卷积的计算（图解法）

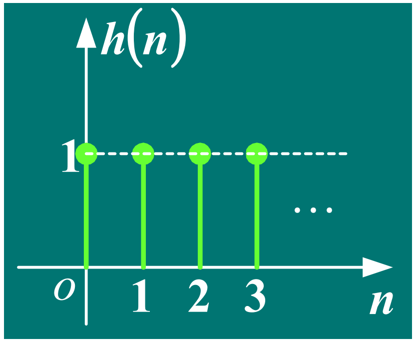
例：已知 $x(n)=\alpha^n u(n)\ \ (0<\alpha<1), h(n)=u(n)$，求卷积 $y(n)=x(n)*h(n)$ 。

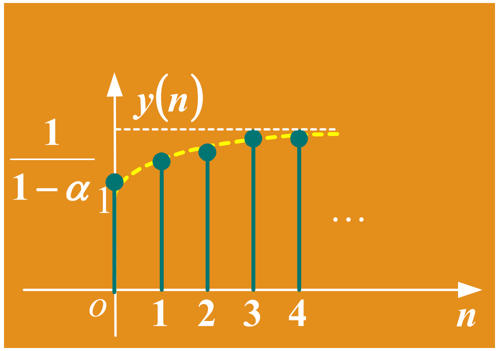
解： $y(n)=x(n)*h(n)\ =(\dfrac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha})\cdot u(n)$

当 $n\to\infty$ 时， $y(n)=\dfrac{1}{1-\alpha}$









5.6 卷积(卷积和)

- **离散卷积的计算（对位相乘求和法）**

例：已知 $x_1(n)=\{\underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{4},\ 3,\ 2,\ 1\}, x_2(n)=\{\underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{3},\ 2,\ 1\}$, 求卷积 $y(n)=x_1(n)*x_2(n)$.

解：

使用对位相乘求和法求卷积，步骤：

两序列右对齐→

逐个样值对应相乘但不进位→

同列乘积值相加（注意$n=0$的点）

$$\begin{array}{lrrrrrrr}
 & x_1(n): & & & 4 & 3 & 2 & 1 \\
\times & x_2(n): & & & & 3 & 2 & 1 \\
\hline
 & & & & 4 & 3 & 2 & 1 \\
 & & & 8 & 6 & 4 & 2 & \\
+ & & 12 & 9 & 6 & 3 & & \\
\hline
 & y(n): & \underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{12} & 17 & 16 & 10 & 4 & 1
\end{array}$$

$$\therefore y(n)=\{\underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{12},\ 17,\ 16,\ 10,\ 4,\ 1\}$$

5.6 卷积(卷积和)

- **离散卷积的计算（利用性质）**

例：已知 $x(n)=R_3(n),h(n)=\{\underset{\substack{\uparrow\\ n=0}}{1},\quad 2,\quad 3\},$ 求卷积 $y(n)=x(n)*h(n)$ 。

解：

$$x(n)=\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)$$

$$h(n)=\delta(n)+2\delta(n-1)+3\delta(n-2)$$

$$\begin{aligned}y(n)&=x(n)*h(n)\\&=\delta(n)+2\delta(n-1)+3\delta(n-2)\\&\qquad+\delta(n-1)+2\delta(n-2)+3\delta(n-3)\\&\qquad\qquad+\delta(n-2)+2\delta(n-3)+3\delta(n-4)\\&=\delta(n)+3\delta(n-1)+6\delta(n-2)+5\delta(n-3)+3\delta(n-4)\end{aligned}$$