

# 《信号与系统》

## 第4章 拉普拉斯变换及s域分析

吉小鹏

E-mail: [003163@nuist.edu.cn](mailto:003163@nuist.edu.cn)

南京信息工程大学 电子与信息工程学院 尚贤楼207





# 提纲

- 4.1 引言
- 4.2 拉普拉斯变换及其收敛域
- 4.3 拉普拉斯变换的基本性质
- 4.4 拉普拉斯逆变换
- 4.5 利用拉普拉斯变换法进行电路分析
- 4.6 系统函数
- 4.7 系统函数及其时域分析
- 4.8 系统函数及其频域分析
- 4.9 线性系统的稳定性
- 4.10 由拉普拉斯变换引出傅里叶变换



# 4.1 引言

## ■ 线性时不变系统分析方法回顾

线性时不变系统分析方法：

- 时域分析法

卷积积分——只能求零状态响应

- 变换域分析方法：把时间变量函数变换到变换域中某一变量的函数

傅里叶变换分析法

系统分析的实质：

- (1) 是将激励信号分解成某种基本的单元信号；
- (2) 求基本单元信号通过系统的响应；
- (3) 最后叠加起来求得总的响应。

卷积法	傅氏变换法
冲激函数	虚指数函数
时域卷积定理	



# 4.1 引言

## ■ 线性时不变系统分析方法回顾

傅里叶变换分析法：

- 优点

物理意义明确，是信号分析的有效工具。

- 缺点：

(1) 要求信号满足狄里赫利条件(满足绝对可积条件)。使一般周期信号、阶跃函数等只能借助于广义函数求得傅氏变换，由于频域中出现冲激函数，使计算带来困难；

(2) 求傅氏反变换有时比较麻烦；

(3) 只能求解零状态响应。



# 4.1 引言

## ■ 拉普拉斯变换的特点

拉普拉斯变换：可以看做是广义的傅里叶变换，从频域扩展至复频域。

优点：

- (1) 求解简化；
- (2) 把微分、积分方程转化为代数方程；
- (3) 将复杂函数转化为简单的初等函数；
- (4) 将卷积转化为乘法运算。



## 4.2 拉普拉斯变换及其收敛域

### ■ 从傅里叶变换到拉普拉斯变换

信号不满足绝对可积条件：

当  $t \rightarrow \infty$  或  $t \rightarrow -\infty$  时， $f(t)$  不趋于零。

若  $f(t)$  不满足狄利赫里条件时，为了获得变换域中的函数，**人为地**用一个**实指数函数**  $e^{-\sigma t}$  去乘  $f(t)$ 。

只要  $\sigma$  取值合适，很多函数(几乎所有常用函数)都可以满足绝对可积条件。

$\sigma$  : 衰减因子

$e^{-\sigma t}$  : 收敛因子

通常把使  $f(t)e^{-\sigma t}$  满足绝对可积条件的  $\sigma$  值的范围，称为拉普拉斯变换的**收敛域**。



## 4.2 拉普拉斯变换及其收敛域

### ■ 从傅里叶变换到拉普拉斯变换

#### • 求 $f(t)e^{-\sigma t}$ 的傅里叶变换

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(t)e^{-\sigma t}] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t} dt\end{aligned}$$

它是  $\sigma + j\omega$  的函数，上式可表示成  $F(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t} dt$

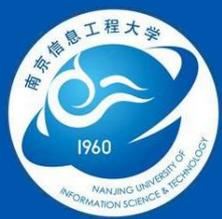
记  $\sigma + j\omega = s$  为复频率，则

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad \therefore \mathcal{F}[f(t)e^{-\sigma t}] = F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$$\text{反变换: } f(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{j\omega t} d\omega \quad \therefore f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{(\sigma+j\omega)t} d\omega$$

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds$$



## 4.2 拉普拉斯变换及其收敛域

### ■ 从傅里叶变换到拉普拉斯变换

拉普拉斯正变换：
$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

拉普拉斯反变换：
$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds$$

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

$$f(t) \leftrightarrow F(s)$$

拉普拉斯变换扩大了信号的变换范围。



## 4.2 拉普拉斯变换及其收敛域

### ■ 从傅里叶变换到拉普拉斯变换

拉普拉斯变换与傅里叶变换的区别：

**傅里叶变换：** 时域函数  $f(t)$   $\longrightarrow$  频域函数  $F(j\omega)$

变量  $t$   $\longrightarrow$  变量  $\omega$

(变量  $t$ 、 $\omega$  都是实数)

**拉普拉斯变换：** 时域函数  $f(t)$   $\longrightarrow$  复频域函数  $F(s)$

变量  $t$   $\longrightarrow$  变量  $s$  (复频率)

$t$  (实数)  $s = \sigma + j\omega$  (复数)

即：

傅里叶变换建立了时域与频域之间的联系；

拉普拉斯变换建立了时域与复频域之间的联系。



# 双边拉普拉斯变换

## ■ 从傅里叶变换到拉普拉斯变换

### • 双边拉氏变换

$$F_B(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

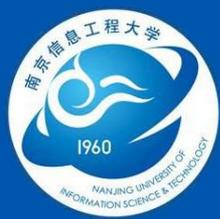
$$f(t) = t \quad \lim_{t \rightarrow \infty} te^{-\sigma t} = 0 \quad (\sigma > 0)$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} te^{-\sigma t} = -\infty \quad (\sigma > 0)$$

$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} te^{-st} dt$  不收敛

$$f_1(t) = e^t u(t) \quad F_{B1}(s) = \frac{1}{s-1} \quad \sigma > \sigma_0 = 1$$

$$f_2(t) = -e^t u(-t) \quad F_{B2}(s) = \frac{1}{s-1} \quad \sigma < \sigma_0 = 1$$



# 双边拉普拉斯变换

## ■ 从傅里叶变换到拉普拉斯变换

$$F_B(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

### • 双边拉氏变换

$$f(t) = u(t) + e^t u(-t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\sigma t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{(1-\sigma)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} dt$$

$$\sigma < 1 \quad \sigma > 0 \quad \therefore 0 < \sigma < 1$$

$$F_B(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^0 e^{(1-s)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-st} dt$$

$$= \frac{1}{1-s} + \frac{1}{s} \quad (0 < \sigma < 1)$$

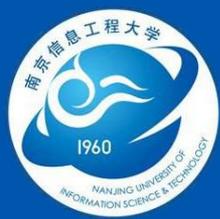
双边拉氏变换一般有两个边界：

一个边界由  $t > 0$  时的函数决定，是左边界，以  $\sigma_1$  表示；

另一个边界由  $t < 0$  时的函数决定，是收敛域的右边界，以  $\sigma_2$  表示。

若  $\sigma_1 < \sigma_2$ ，则有共同的收敛区域，双边拉氏变换存在；

若  $\sigma_1 \geq \sigma_2$ ，则无共同收敛区域，双边拉氏变换不存在。



# 双边拉普拉斯变换

## ■ 从傅里叶变换到拉普拉斯变换

### • 双边拉氏变换

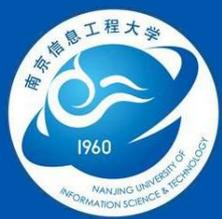
$$F_B(s) = \frac{1}{1-s} + \frac{1}{s} \quad f(t) = u(t) + e^t u(-t)$$

$$0 < \sigma < 1: \quad f_1(t) = u(t) + e^t u(-t)$$

$$\sigma > 1: \quad f_2(t) = (1 - e^t)u(t)$$

$$\sigma < 0: \quad f_3(t) = (e^t - 1)u(-t)$$

不同的函数在各不相同的收敛域条件下可能得到同样的双边拉氏变换，原函数和象函数之间不是一一对应关系。



## 4.2 拉普拉斯变换及其收敛域

### ■ 从傅里叶变换到拉普拉斯变换

#### • 单边拉氏变换

原因：

1. 实际信号都是有始信号，即  $t < 0$  时， $f(t) = 0$ ，或者只需考虑  $t \geq 0$  的部分；
2. 我们观察问题总有一个起点。

$$\therefore F(s) = \int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

积分下限用  $0_-$  目的是把  $t = 0$  时出现的冲激包含进去，这样，利用拉氏变换求解微分方程时，可以直接引用已知的初始状态  $f(0_-)$ ，但**反变换的积分限并不改变**。

### 以后重点讨论单边拉氏变换。



## 4.2 拉普拉斯变换及其收敛域

### ■ 从傅里叶变换到拉普拉斯变换

#### • 单边拉氏变换

由于我们重点讨论**单边拉氏变换**，所以有  $f(t)$  和  $f(t)u(t)$  的拉氏正变换  $F(s)$  是一样的。

反之，已知  $F(s)$  求拉氏反变换式，也无法求得  $t < 0$  时的  $f(t)$  表达式。

#### **单边拉氏变换的优点：**

不仅可以求解零状态响应，而且可以求解零输入响应或全响应。

单边拉氏变换自动将初始条件包含在其中了；而且，只需要了解  $t=0^-$  时的情况就可以了。



## 4.2 拉普拉斯变换及其收敛域

### ■ (单边) 拉氏变换的收敛域

#### • 单边拉氏变换

通常把使  $f(t)e^{-\sigma t}$  满足绝对可积条件的  $\sigma$  值的范围，称为拉普拉斯变换的**收敛域**。

若  $f(t)$  乘以收敛因子  $e^{-\sigma t}$  后，存在下列关系：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-\sigma t} = 0 \quad (\sigma > \sigma_0)$$

则**收敛条件**为  $\sigma > \sigma_0$

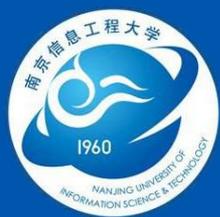
满足上述条件的**最低限度**的  $\sigma$  值， $\sigma_0$  称为**收敛坐标**。

**如：**有始有终的能量信号  $\sigma_0 = -\infty$

周期信号是功率信号  $\sigma_0 = 0$

按指数规律增长的信号  $e^{\alpha t}$ ， $\sigma_0 = \alpha$

$e^{t^2}$  找不到  $\sigma_0$ ，不存在拉氏变换。



## 4.2 拉普拉斯变换及其收敛域

### ■ (单边) 拉氏变换的收敛域

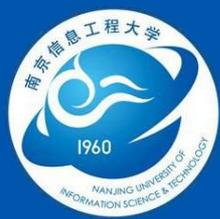
#### • 单边拉氏变换

凡增长速度不超过指数函数的函数，即满足  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-\sigma t} = 0$  ( $\sigma > \sigma_0$ ) 的函数，称为**指数阶函数**，**都存在拉氏变换**。

**单边拉氏变换的收敛域**是复平面内  $\text{Re}(s) = \sigma > \sigma_0$  的区域。

#### 说明：

单边拉氏变换的函数一般均满足指数阶的条件，且总存在收敛域。一般非特殊说明，不再标注收敛域。



## 4.2 拉普拉斯变换及其收敛域

### ■ 常用信号的拉氏变换

- 指数信号  $e^{-\alpha t} u(t)$  (此处  $\alpha$  无任何限制)

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}] = \int_{0-}^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-st} dt = \int_{0-}^{\infty} e^{-(\alpha+s)t} dt = \frac{1}{s + \alpha}$$

即:  $e^{-\alpha t} \leftrightarrow \frac{1}{s + \alpha} \quad (\sigma > -\alpha)$

可以导出一些常用函数的拉氏变换:

(1) 令  $\alpha = 0$ , 则  $\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}$

(2) 单边正弦信号  $\sin(\omega t) \cdot u(t)$

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})\right] = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega}\right] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

即:  $\sin(\omega t) \leftrightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$



## 4.2 拉普拉斯变换及其收敛域

### ■ 常用信号的拉氏变换

- 指数信号  $e^{-\alpha t} u(t)$  (此处  $\alpha$  无任何限制)

$$e^{-\alpha t} \leftrightarrow \frac{1}{s + \alpha} \quad (\sigma > -\alpha)$$

可以导出一些常用函数的拉氏变换:

- (3) 单边余弦信号  $\cos(\omega_0 t) \cdot u(t)$

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega}\right] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

即:  $\cos(\omega t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega^2}$

- (4) 单边衰减或增长的正弦信号  $e^{-\alpha t} \sin(\omega t) \cdot u(t)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{-\alpha t} \sin(\omega t)] &= \mathcal{L}\left[\frac{1}{2j}(e^{-(\alpha - j\omega)t} - e^{-(\alpha + j\omega)t})\right] = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{s + \alpha - j\omega} - \frac{1}{s + \alpha + j\omega}\right] = \frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2} \end{aligned}$$



## 4.2 拉普拉斯变换及其收敛域

### ■ 常用信号的拉氏变换

- $t$  的正幂信号  $t^n$  ( $n$  为正整数)

$$\mathcal{L}[t^n] = \int_{0_-}^{\infty} t^n e^{-st} dt = -\frac{t^n}{s} e^{-st} \Big|_{0_-}^{\infty} + \frac{n}{s} \int_{0_-}^{\infty} t^{n-1} e^{-st} dt = \frac{n}{s} \int_{0_-}^{\infty} t^{n-1} e^{-st} dt$$

$$\text{即: } \mathcal{L}[t^n] = \frac{n}{s} \mathcal{L}[t^{n-1}]$$

$$\therefore \mathcal{L}[t^n] = \frac{n}{s} \cdot \frac{n-1}{s} \cdot \frac{n-2}{s} \cdots \frac{2}{s} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$t^n \leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$t \leftrightarrow \frac{1}{s^2}$$



## 4.2 拉普拉斯变换及其收敛域

### ■ 常用信号的拉氏变换

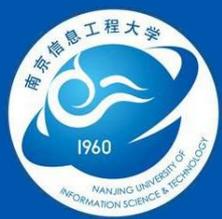
#### • 冲激函数 $\delta(t)$

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_{0-}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = e^{-st} \Big|_{t=0} = 1$$

$$\mathcal{L}[\delta(t-t_0)] = \int_{0-}^{\infty} \delta(t-t_0) e^{-st} dt = e^{-st} \Big|_{t=t_0} = e^{-st_0} \quad (t_0 > 0)$$

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

$$\delta(t-t_0) \leftrightarrow e^{-st_0}$$



## 4.2 拉普拉斯变换及其收敛域

### ■ 小结

拉氏变换有三类情况：

- **1. 增长的指数信号**

只有拉氏变换，没有傅氏变换。  $\sigma_0 > 0$

如  $e^{\alpha t}$  ( $\alpha > 0$ )

- **2.  $\sigma_0 < 0$**

拉氏变换、傅氏变换都存在，且  $F(\omega) = F(s)|_{s=j\omega}$ 。

如  $e^{\alpha t}$  ( $\alpha < 0$ )  $F(\omega) = \frac{1}{j\omega + \alpha}$   $F(s) = \frac{1}{s + \alpha}$

- **3.  $\sigma_0 = 0$**

拉氏变换、傅氏变换都存在，但不满足第2类。

如  $u(t)$   $F(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$   $F(s) = \frac{1}{s}$



## 4.3 拉普拉斯变换的基本性质

在实际应用中，通常不是利用定义式计算拉氏变换，而是巧妙地利用拉氏变换的一些基本性质来求取。

拉氏变换的**有些**性质与傅氏变换性质极为相似，只要把傅氏变换中的 $j\omega$ 用 $s$ 替代即可。

但是傅氏变换是双边的，而我们这里讨论的拉氏变换是单边的，所以某些性质又有差别。



## 4.3 拉普拉斯变换的基本性质

### ■ 线性

若  $f_1(t) \leftrightarrow F_1(s), f_2(t) \leftrightarrow F_2(s)$

则  $K_1 f_1(t) + K_2 f_2(t) \leftrightarrow K_1 F_1(s) + K_2 F_2(s)$

**例：** 求  $f(t) = \sin \omega t u(t)$  的拉氏变换  $F(s)$

**解：**  $\because \sin \omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$

$$e^{j\omega t} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s - j\omega}, \quad e^{-j\omega t} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s + j\omega}$$

$$\therefore \mathcal{L}[\sin \omega t u(t)] = \frac{1}{2j} \left[ \frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega} \right] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$



## 4.3 拉普拉斯变换的基本性质

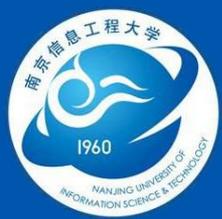
### ■ 延时特性

若  $f(t) \leftrightarrow F(s)$

则  $f(t-t_0)u(t-t_0) \leftrightarrow e^{-st_0} F(s) \quad (t_0 > 0)$

证明:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t-t_0)u(t-t_0)] &= \int_{0_-}^{\infty} f(t-t_0)u(t-t_0)e^{-st} dt = \int_{t_0}^{\infty} f(t-t_0)e^{-st} dt \\ &\stackrel{\tau = t - t_0}{=} \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-st_0}e^{-s\tau} d\tau \\ &= e^{-st_0} F(s)\end{aligned}$$



# 4.3 拉普拉斯变换的基本性质

## ■ 延时特性

例：设  $f(t) = t$ ， $F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s^2}$ 。若  $t_0 > 0$ ，试求如下拉氏变换：

(1)  $f(t - t_0) = t - t_0$

(2)  $f(t - t_0)u(t) = (t - t_0)u(t)$

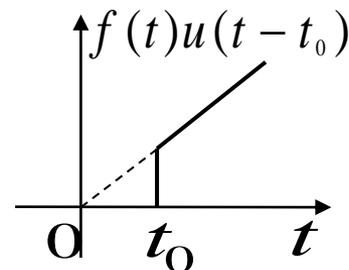
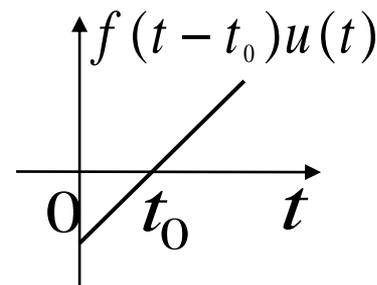
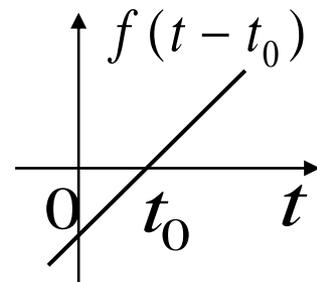
(3)  $f(t)u(t - t_0) = tu(t - t_0)$

(4)  $f(t - t_0)u(t - t_0) = (t - t_0)u(t - t_0)$

解：(1)  $\mathcal{L}[f(t - t_0)] = \mathcal{L}[t - t_0] = \frac{1}{s^2} - \frac{t_0}{s} = \frac{1 - st_0}{s^2}$

(2)  $\mathcal{L}[f(t - t_0)u(t)] = \mathcal{L}[f(t - t_0)] = \frac{1 - st_0}{s^2}$

(3)  $\mathcal{L}[f(t)u(t - t_0)] = \mathcal{L}[tu(t - t_0)]$   
 $= \mathcal{L}[(t - t_0)u(t - t_0) + t_0u(t - t_0)]$   
 $= \frac{1}{s^2} e^{-st_0} + \frac{t_0}{s} e^{-st_0} = \frac{1 + st_0}{s^2} e^{-st_0}$





## 4.3 拉普拉斯变换的基本性质

### ■ 延时特性

利用延时特性可以求（单边）周期信号的拉氏变换。

设  $f_1(t)$  表示第一个周期的函数，则有

$$f(t) = f_1(t) + f_1(t-T)u(t-T) + f_1(t-2T)u(t-2T) + \dots$$

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(s) \quad f_1(t-nT) \leftrightarrow e^{-snT} F_1(s)$$

$$\therefore f(t) \leftrightarrow F(s) = (1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + \dots)F_1(s)$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-Ts}} F_1(s)$$



## 4.3 拉普拉斯变换的基本性质

### ■ 延时特性

抽样信号的拉氏变换:

$$\text{抽样序列: } \delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$\text{抽样序列的拉氏变换: } \delta_T(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-snT} = \frac{1}{1 - e^{-sT}}$$

$$\text{时域抽样信号: } f_s(t) = f(t)\delta_T(t)$$

$$\text{抽样信号的拉氏变换: } F_s(s) = \int_0^{\infty} f(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) e^{-st} dt$$

$$= \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f(t) \delta(t - nT) e^{-st} dt$$

$$= \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \delta(t - nT) e^{-st} dt$$

$$F_s(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-snT}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \int_0^{\infty} \delta(t - nT) e^{-st} dt = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-snT}$$



## 4.3 拉普拉斯变换的基本性质

### ■ s域平移

若  $f(t) \leftrightarrow F(s)$

则  $f(t)e^{\pm s_0 t} \leftrightarrow F(s \mp s_0)$

此处,  $s_0$  可以是实数, 也可以是虚数或者复数。

证明:  $\mathcal{L}[f(t)e^{-s_0 t}] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-s_0 t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(s+s_0)t} dt = F(s+s_0)$

傅里叶变换的频移特性:  $f(t)e^{\pm j\omega_0 t} \leftrightarrow F(\omega \mp \omega_0)$

**例:** 求  $e^{-\alpha t} \sin \omega t$  和  $e^{-\alpha t} \cos \omega t$  的拉氏变换。

**解:**  $\because \sin \omega t \leftrightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$

$\because \cos \omega t \leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega^2}$

$\therefore e^{-\alpha t} \sin \omega t \leftrightarrow \frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$

$\therefore e^{-\alpha t} \cos \omega t \leftrightarrow \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$



## 4.3 拉普拉斯变换的基本性质

### ■ 尺度变换特性

若  $f(t) \leftrightarrow F(s)$

则  $f(\alpha t) \leftrightarrow \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right) \quad (\alpha > 0)$

**证明:**  $\mathcal{L}[f(\alpha t)] = \int_0^{\infty} f(\alpha t) e^{-st} dt$   
 $= \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-\frac{s}{\alpha}\tau} d\frac{\tau}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-\frac{s}{\alpha}\tau} d\tau = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$

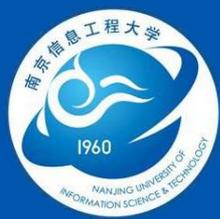
**例:** 若  $f(t) \leftrightarrow F(s), a > 0, b > 0$ , 求  $\mathcal{L}[f(at-b)u(at-b)]$ 。

**解:** 先延时:  $f(t-b)u(t-b) \leftrightarrow F(s)e^{-bs}$

再尺度:  $f(at-b)u(at-b) \leftrightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) e^{-\frac{b}{a}s}$

先尺度:  $f(at)u(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$

再延时:  $f(at-b)u(at-b) = f\left[a\left(t-\frac{b}{a}\right)\right]u\left[a\left(t-\frac{b}{a}\right)\right] \leftrightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) e^{-\frac{b}{a}s}$



## 4.3 拉普拉斯变换的基本性质

### ■ 时域微分

若  $f(t) \leftrightarrow F(s)$

则  $\frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow sF(s) - f(0_-)$

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow s^n F(s) - s^{n-1} f(0_-) - s^{n-2} f^{(1)}(0_-) \cdots - f^{(n-1)}(0_-)$$

主要用于研究具有初始条件的微分方程。

$$\frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow sF(s) - f(0_-)$$
$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \leftrightarrow s^2 F(s) - sf(0_-) - f'(0_-)$$

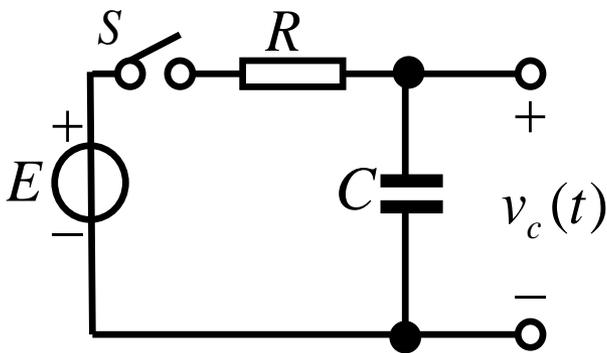
若  $f(t)$  为有始函数，则

$$f(t) = f(t)u(t) \quad \frac{df(t)u(t)}{dt} \leftrightarrow sF(s)$$

## 4.3 拉普拉斯变换的基本性质

### ■ 时域微分

**例：** 图示电路，在 $t=0$ 时开关S闭合，求输出电压 $v_c(t)$



**解：** (1) 列写微分方程

$$RC \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = Eu(t)$$

(2) 两边取拉氏变换，得

$$RC[sV_c(s) - v_c(0_-)] + V_c(s) = \frac{E}{s}$$

$$\because v_c(0_-) = 0$$

$$\therefore V_c(s) = \frac{E}{s(RCs + 1)} = E \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \right)$$

(3) 求 $V_c(s)$ 的拉氏逆变换

$$\therefore v_c(t) = \mathcal{L}^{-1}[V_c(s)] = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}})u(t)$$



# 4.3 拉普拉斯变换的基本性质

## ■ 时域微分

**例：** 设  $f_1(t) = e^{-\alpha t}u(t)$ ,  $f_2(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ e^{-\alpha t} & t > 0 \end{cases}$ , 试求  $f_1'(t)$ 和  $f_2'(t)$ 的拉氏变换。

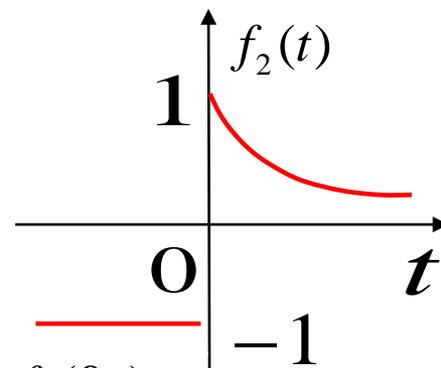
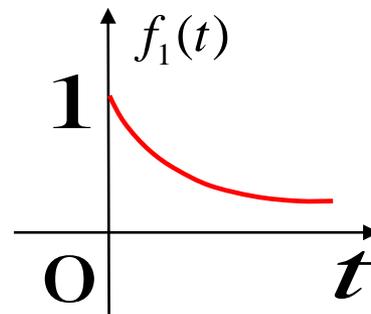
**解：**  $\mathcal{L}[f_1(t)] = \mathcal{L}[f_2(t)]$ ,  $F_1(s) = F_2(s) = \frac{1}{s + \alpha}$

$$\therefore \frac{df_1(t)}{dt} = \delta(t) - \alpha e^{-\alpha t}u(t)$$

$$\therefore \mathcal{L}\left[\frac{df_1(t)}{dt}\right] = 1 - \frac{\alpha}{s + \alpha} = \frac{s}{s + \alpha} = sF_1(s)$$

$$\therefore \frac{df_2(t)}{dt} = 2\delta(t) - \alpha e^{-\alpha t}u(t)$$

$$\therefore \mathcal{L}\left[\frac{df_2(t)}{dt}\right] = 2 - \frac{\alpha}{s + \alpha} = 1 + \frac{s}{s + \alpha} = sF_2(s) - f_2(0_-)$$



**由于  $f(0_-)$  不同，所求导数的拉氏变换不同。**

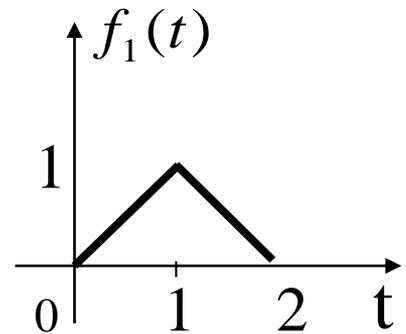


# 4.3 拉普拉斯变换的基本性质

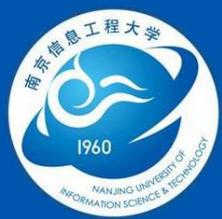
## ■ 时域微分

**例：**求函数  $f_1(t)$  的拉氏变换。

**解法一：按定义式求拉氏变换**



$$\begin{aligned} F_1(s) &= \int_{0_-}^{\infty} f_1(t)e^{-st} dt = \int_{0_-}^1 te^{-st} dt + \int_1^2 (2-t)e^{-st} dt \\ &= \left(-\frac{1}{s}\right) \left[ te^{-st} \Big|_{0_-}^1 - \int_{0_-}^1 e^{-st} dt \right] + 2 \int_1^2 e^{-st} dt - \int_1^2 te^{-st} dt \\ &= \left(-\frac{1}{s}\right) \left[ (e^{-s} - 0) + \frac{1}{s}(e^{-s} - 1) \right] - \frac{2}{s}(e^{-2s} - e^{-s}) + \frac{1}{s} \left[ te^{-st} \Big|_1^2 - \int_1^2 e^{-st} dt \right] \\ &= \frac{1}{s^2} \left[ -se^{-s} - (e^{-s} - 1) - 2s(e^{-2s} - e^{-s}) \right] + \frac{1}{s} \left[ (2e^{-2s} - e^{-s}) + \frac{1}{s}(e^{-2s} - e^{-s}) \right] \\ &= \frac{1}{s^2} \left( \underline{-se^{-s}} - \underline{e^{-s}} + \underline{1} - \underline{2se^{-2s}} + \underline{2se^{-s}} + \underline{2se^{-2s}} - \underline{se^{-s}} + \underline{e^{-2s}} - \underline{e^{-s}} \right) \\ &= \frac{1}{s^2} ( e^{-2s} - 2e^{-s} + 1 ) = \frac{(1 - e^{-s})^2}{s^2} \end{aligned}$$



## 4.3 拉普拉斯变换的基本性质

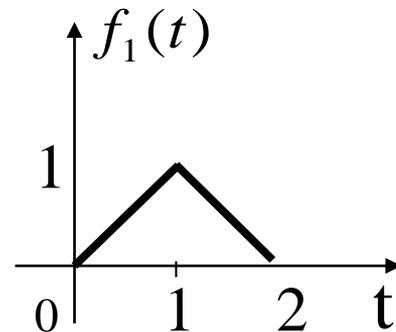
### ■ 时域微分

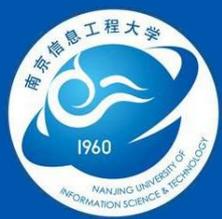
**例：**求函数  $f_1(t)$  的拉氏变换。

**解法二：**利用线性和时移性质

$$\begin{aligned} f_1(t) &= t[u(t) - u(t-1)] + (2-t)[u(t-1) - u(t-2)] \\ &= tu(t) - 2(t-1)u(t-1) + (t-2)u(t-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_1(s) &= \frac{1}{s^2} - 2\frac{1}{s^2}e^{-s} + \frac{1}{s^2}e^{-2s} \\ &= \frac{1}{s^2}(1 - e^{-s})^2 \end{aligned}$$





# 4.3 拉普拉斯变换的基本性质

## ■ 时域微分

**例：**求函数  $f_1(t)$  的拉氏变换。

**解法三：利用时域微分性质**

$$f_1''(t) = \delta(t) - 2\delta(t-1) + \delta(t-2)$$

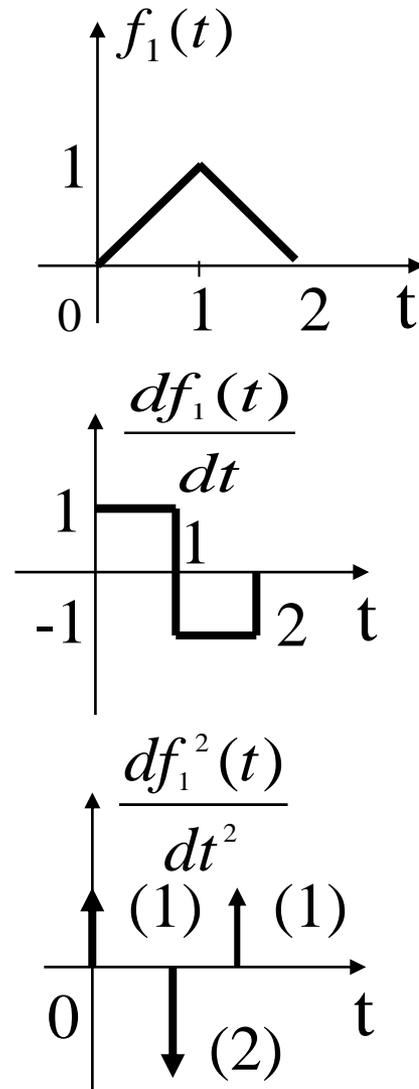
$$\mathcal{L}[f_1''(t)] = 1 - 2e^{-s} + e^{-2s} = (1 - e^{-s})^2$$

$$\mathcal{L}[f_1''(t)] = s^2 F_1(s) - sf_1(0_-) - f_1'(0_-)$$

$$\because f_1(0_-) = 0, f_1'(0_-) = 0$$

$$\therefore \mathcal{L}[f_1''(t)] = s^2 F_1(s) = (1 - e^{-s})^2$$

$$\therefore F_1(s) = \frac{1}{s^2} (1 - e^{-s})^2$$





## 4.3 拉普拉斯变换的基本性质

### ■ 时域积分

若  $f(t) \leftrightarrow F(s)$

$$\text{则 } \int_{0_-}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{F(s)}{s}$$

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0_-)}{s}$$

如已知  $u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}$  ,  $tu(t) = \int_{0_-}^t u(\tau) d\tau$  , 则

$$tu(t) \leftrightarrow \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$



## 4.3 拉普拉斯变换的基本性质

### ■ 初值定理

若  $f(t) \leftrightarrow F(s)$  且  $\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$  存在(  $F(s)$  为**真分式** )

则  $f(0_+) = \lim_{t \rightarrow 0_+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$

**注意:**

(1) 当  $F(s)$  为有理真分式时, 可以直接套用公式。

(2) 当  $F(s)$  不是真分式时, 应首先用长除法将  $F(s)$  化成一个多项式与一个真分式之和, 然后对真分式用初值定理。

多项式部分所对应的原函数为冲激函数及其导数, 在  $t = 0_+$  时全为零, 不影响  $f(0_+)$  的值。



## 4.3 拉普拉斯变换的基本性质

### ■ 初值定理

**例：**若  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \frac{-s}{s+1}$ ，求初值  $f(0_+)$ 。

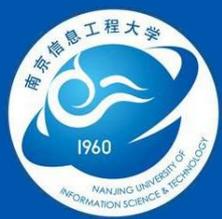
**解：**

$$\because F(s) = \frac{-s}{s+1} = -1 + \frac{1}{s+1} \quad \therefore f(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \left[ \frac{1}{s+1} \right] = 1$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \left[ \frac{-s}{s+1} \right] = -\infty$$

$$f(t) = -\delta(t) + e^{-t}u(t) \quad f(0_+) = 1$$

初值定理条件： $\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$  必须存在，意味着  $f(t)$  本身在时域中不能包含冲激。但由于  $\delta(0_+) = 0$ ， $\delta(t)$  的存在，不影响  $f(0_+)$  的值，所以可把  $\delta(t)$  移去后再应用初值定理，即**只取真分式**部分。



## 4.3 拉普拉斯变换的基本性质

### ■ 初值定理

**例：** 已知  $F(s) = \frac{s^3 + s^2 + 2s + 1}{s^2 + 2s + 1}$ ，求初值  $f(0_+)$ 。

**解：**

$$\because F(s) = s - 1 + \frac{3s + 2}{s^2 + 2s + 1}$$

$$\therefore f(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \left[ \frac{3s + 2}{s^2 + 2s + 1} \right] = 3$$

$$f(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \left[ \frac{s^3 + s^2 + 2s + 1}{s^2 + 2s + 1} \right] = \infty$$





## 4.3 拉普拉斯变换的基本性质

### ■ 终值定理

若  $f(t) \leftrightarrow F(s)$  且  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  存在,

$$\text{则 } f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

条件是  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  存在, 相当于  $F(s)$  的极点都在复频域  $s$  平面的左半平面, 并且如果在虚轴上有极点的话, 只能在原点处有单极点。

$$\text{例如 } F(s) = \mathcal{L}[e^{\alpha t}] = \frac{1}{s - \alpha} \quad (\alpha > 0)$$

其极点  $s = \alpha$  在  $s$  平面的右半平面, 不能用终值定理; 否则, 会得到  $f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s - \alpha} = 0$  的错误结果。

$$\text{例如 } F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

其极点  $s_{1,2} = \pm j\omega$  在虚轴上, 所以  $f(t)$  终值不存在。



## 4.3 拉普拉斯变换的基本性质

### ■ 终值定理

**例：** 已知  $F(s) = \frac{5}{s(s^2 + 3s + 2)}$ ，求终值  $f(\infty)$ 。

**解：**

因为  $F(s)$  的极点为  $s_{1,2,3} = 0, -1, -2$ ，满足终值定理的条件，  
所以有

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{5}{s^2 + 3s + 2} = \frac{5}{2}$$

**求终值，首先要判断极点位置！**



## 4.3 拉普拉斯变换的基本性质

### ■ 卷积定理

#### • 时域卷积定理

若  $f_1(t) \leftrightarrow F_1(s), f_2(t) \leftrightarrow F_2(s)$

则  $f_1(t)*f_2(t) \leftrightarrow F_1(s) \cdot F_2(s)$

#### • 复频域卷积定理

若  $f_1(t) \leftrightarrow F_1(s), f_2(t) \leftrightarrow F_2(s)$

则  $f_1(t) \cdot f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi j} F_1(s) * F_2(s)$

其中  $F_1(s) * F_2(s) = \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F_1(\tau) F_2(s-\tau) d\tau$



## 4.3 拉普拉斯变换的基本性质

### ■ 卷积定理

**例：** 已知  $f_1(t) = e^{-\alpha t}u(t)$ ,  $f_2(t) = u(t)$ , 求  $f_1(t) * f_2(t)$ 。

**解：**  $\because F_1(s) = \frac{1}{s + \alpha} \quad F_2(s) = \frac{1}{s}$

$$\therefore F_1(s) \cdot F_2(s) = \frac{1}{s(s + \alpha)} = \frac{1}{\alpha} \left[ \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \alpha} \right]$$

$$\therefore f_1(t) * f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s) \cdot F_2(s)] = \frac{1}{\alpha} [1 - e^{-\alpha t}]u(t)$$



## 4.3 拉普拉斯变换的基本性质

### ■ 复频域微分

若  $f(t) \leftrightarrow F(s)$  ,

则  $tf(t) \leftrightarrow -\frac{dF(s)}{ds}$

**证明:**  $\because F(s) = \int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$

$$\therefore \frac{dF(s)}{ds} = \int_{0_-}^{\infty} (-t) f(t) e^{-st} dt$$

$$= -\int_{0_-}^{\infty} tf(t) e^{-st} dt$$

$$\therefore tf(t) \leftrightarrow -\frac{dF(s)}{ds}$$



## 4.3 拉普拉斯变换的基本性质

### ■ 复频域积分

若  $f(t) \leftrightarrow F(s)$  ,

则  $\frac{f(t)}{t} \leftrightarrow \int_s^\infty F(s) ds$

**证明:**  $\because \int_s^\infty F(s) ds = \int_s^\infty [\int_{0_-}^\infty f(t) e^{-st} dt] ds$

$$= \int_{0_-}^\infty f(t) [\int_s^\infty e^{-st} ds] dt$$

$$= \int_{0_-}^\infty f(t) \left[ \frac{1}{-t} e^{-st} \right]_s^\infty dt$$

$$= \int_{0_-}^\infty \frac{f(t)}{t} e^{-st} dt$$

$$\therefore \frac{f(t)}{t} \leftrightarrow \int_s^\infty F(s) ds$$



## 4.3 拉普拉斯变换的基本性质

### ■ 卷积定理

**例：**求单边拉氏变换：(1)  $t \frac{d \cos t \cdot u(t)}{dt}$ , (2)  $\sin t \cdot u(t - \pi)$

**解：**(1)  $\because \cos t \cdot u(t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2 + 1}$

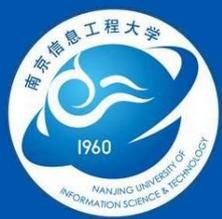
$$\therefore \frac{d \cos t \cdot u(t)}{dt} \leftrightarrow s \cdot \frac{s}{s^2 + 1} - \cos(0_-) \cdot u(0_-) = \frac{s^2}{s^2 + 1}$$

$$\therefore t \frac{d \cos t \cdot u(t)}{dt} \leftrightarrow -\frac{d}{ds} \left( \frac{s^2}{s^2 + 1} \right) = -\frac{2s}{(s^2 + 1)^2}$$

(2)  $\because \sin t \cdot u(t - \pi) = -\sin(t - \pi) \cdot u(t - \pi)$

$$\sin t \cdot u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$\therefore \sin t \cdot u(t - \pi) \leftrightarrow -\frac{1}{s^2 + 1} e^{-s\pi}$$



## 4.4 拉普拉斯逆变换

### 拉普拉斯逆变换的常用方法：

- 查表法
- 部分分式展开法
- 留数法(围线积分法)
- 利用拉普拉斯变换的性质



## 4.4 拉普拉斯逆变换

### ■ 简单的拉普拉斯逆变换

直接应用典型信号的拉氏变换对(表4-1)以及拉氏变换性质(表4-2)。

$$\delta(t), u(t), \sin \omega_0 t, \cos \omega_0 t, e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t, e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t, t^n, \sinh \beta t, \cosh \beta t, \dots$$





## 4.4 拉普拉斯逆变换

### ■ 简单的拉普拉斯逆变换

**例:** 
$$\frac{1-2e^{-\alpha s}}{s+1} = \frac{1}{s+1} - \frac{2}{s+1}e^{-\alpha s} \leftrightarrow e^{-t}u(t) - 2e^{-(t-\alpha)}u(t-\alpha)$$

**例:** 
$$\frac{s}{(s+2)^2} = s \cdot \frac{1}{(s+2)^2}$$

$$\frac{1}{s^2} \leftrightarrow tu(t) \qquad \frac{1}{(s+2)^2} \leftrightarrow te^{-2t}u(t)$$

$$\therefore s \cdot \frac{1}{(s+2)^2} \leftrightarrow \frac{d}{dt}[te^{-2t}u(t)] = e^{-2t}u(t) - 2te^{-2t}u(t) = (1-2t)e^{-2t}u(t)$$

**例:** 求  $F(s) = \frac{s}{(s^2+3)^2}$  的原函数。

**解:** 
$$\frac{\sqrt{3}}{s^2+3} \leftrightarrow \sin \sqrt{3}t \cdot u(t) \quad \frac{d}{ds} \left( \frac{\sqrt{3}}{s^2+3} \right) = -\frac{2\sqrt{3}s}{(s^2+3)^2} \leftrightarrow -t \sin \sqrt{3}t \cdot u(t)$$

$$\therefore F(s) = \frac{s}{(s^2+3)^2} \leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{3}} t \sin \sqrt{3}t \cdot u(t)$$



## 4.4 拉普拉斯逆变换

### ■ 部分分式展开法

常见的拉氏变换式是 $s$ 的多项式之比，一般形式为：

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \cdots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}$$

如果 $A(s)$ 的阶次高于 $B(s)$ 的阶次，可以用长除法将 $F(s)$ 化成多项式与真分式之和的形式，如

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{3s^3 - 2s^2 - 7s + 1}{s^2 + s - 1} = 3s - 5 + \frac{s - 4}{s^2 + s - 1}$$

多项式部分的拉氏逆变换是冲激函数及其导数，可以直接求得。

例如  $3s - 5 \leftrightarrow 3\delta'(t) - 5\delta(t)$

所以只需讨论真分式部分的拉氏逆变换。



## 4.4 拉普拉斯逆变换

### ■ 部分分式展开法

- 极点为实数，无重根

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \cdots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \cdots + a_1 s + a_0}{b_n (s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$$

式中，系数  $a_i$  和  $b_i$  都是实数， $m$  和  $n$  是正整数， $p_i$  为  $F(s)$  的极点。

$$F(s) = \frac{K_1}{s - p_1} + \frac{K_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{K_n}{s - p_n}$$

$$K_i = (s - p_i)F(s) \Big|_{s=p_i}, i = 1, 2, \cdots, n$$

$$\begin{aligned} \text{此时, } \mathcal{L}[F(s)] &= \mathcal{L}\left[\frac{K_1}{s - p_1}\right] + \mathcal{L}\left[\frac{K_2}{s - p_2}\right] + \cdots + \mathcal{L}\left[\frac{K_n}{s - p_n}\right] \\ &= [K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + \cdots + K_n e^{p_n t}] u(t) \end{aligned}$$



## 4.4 拉普拉斯逆变换

### ■ 部分分式展开法

**例：** 求  $F(s) = \frac{10(s+2)(s+5)}{s(s+1)(s+3)}$  的逆变换。

**解：** 将  $F(s)$  展开成部分分式的形式  $F(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1} + \frac{K_3}{s+3}$

分别求  $K_1, K_2, K_3$

$$K_1 = sF(s)|_{s=0} = \frac{100}{3} \quad K_2 = (s+1)F(s)|_{s=-1} = -20$$

$$K_3 = (s+3)F(s)|_{s=-3} = -\frac{10}{3}$$

$$F(s) = \frac{100}{3s} - \frac{20}{s+1} - \frac{10}{3(s+3)}$$

$$f(t) = \left(\frac{100}{3} - 20e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-3t}\right)u(t)$$



## 4.4 拉普拉斯逆变换

### ■ 部分分式展开法

**例：** 求  $F(s) = \frac{s^3 + 5s^2 + 9s + 7}{(s+1)(s+2)}$  的逆变换。

**解：**  $F(s) = s + 2 + \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = s + 2 + \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2}$

$$K_1 = 2, \quad K_2 = -1$$

$$F(s) = s + 2 + \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

$$f(t) = \delta'(t) + 2\delta(t) + (2e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$



## 4.4 拉普拉斯逆变换

### ■ 部分分式展开法

- 包含共轭复数极点

$$F(s) = \frac{A(s)}{D(s)[(s + \alpha)^2 + \beta^2]}$$

其中,  $D(s) = (s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_m)$

$$F(s) = \frac{As + B}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} + \frac{K_1}{s - p_1} + \frac{K_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{K_m}{s - p_m}$$

A、B由待定系数法求出。

$$F(s) = \frac{A(s + \alpha) + k\beta}{(s + \alpha)^2 + \beta^2} + \frac{K_1}{s - p_1} + \frac{K_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{K_m}{s - p_m}$$

$$f(t) = Ae^{-\alpha t} \cos \beta t + ke^{-\alpha t} \sin \beta t + [K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + \cdots + K_m e^{p_m t}] u(t)$$

$$= e^{-\alpha t} (A \cos \beta t + k \sin \beta t) + [K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + \cdots + K_m e^{p_m t}] u(t)$$



## 4.4 拉普拉斯逆变换

### ■ 部分分式展开法

**例：**求  $F(s) = \frac{s^2 + 3}{(s^2 + 2s + 5)(s + 2)}$  的逆变换。

**解：** $F(s) = \frac{s^2 + 3}{(s + 2)[(s + 1)^2 + 4]} = \frac{K_1}{s + 2} + \frac{As + B}{(s + 1)^2 + 4}$       $K_1 = (s + 2)F(s)|_{s=-2} = \frac{7}{5}$

$$F(s) = \frac{\frac{7}{5}}{s + 2} + \frac{As + B}{(s + 1)^2 + 4} = \frac{(\frac{7}{5} + A)s^2 + (\frac{14}{5} + B + 2A)s + 7 + 2B}{(s + 2)[(s + 1)^2 + 4]}$$

$$(\frac{7}{5} + A)s^2 + (\frac{14}{5} + B + 2A)s + 7 + 2B = s^2 + 3 \quad A = -\frac{2}{5}, \quad B = -2$$

$$F(s) = \frac{\frac{7}{5}}{s + 2} + \frac{-\frac{2}{5}s - 2}{(s + 1)^2 + 4} = \frac{7}{5} \frac{1}{s + 2} + \frac{-\frac{2}{5}(s + 1) - \frac{4}{5} \times 2}{(s + 1)^2 + 4}$$

$$\therefore f(t) = [\frac{7}{5}e^{-2t} - \frac{2}{5}e^{-t} \cos 2t - \frac{4}{5}e^{-t} \sin 2t]u(t)$$



## 4.4 拉普拉斯逆变换

### ■ 部分分式展开法

**例：** 求  $F(s) = \frac{1 - e^{-2s}}{s(s^2 + 4)}$  的逆变换。

**解：**  $F(s) = \frac{1 - e^{-2s}}{s(s^2 + 4)} = \left(\frac{K_1}{s} + \frac{K_2s + K_3}{s^2 + 4}\right)(1 - e^{-2s})$        $K_1 = s \frac{1}{s(s^2 + 4)} \Big|_{s=0} = \frac{1}{4}$

$$F(s) = \left(\frac{1/4}{s} + \frac{K_2s + K_3}{s^2 + 4}\right)(1 - e^{-2s}) = \frac{(K_2 + 1/4)s^2 + K_3s + 1}{s(s^2 + 4)}(1 - e^{-2s})$$

$$K_2 = -\frac{1}{4}, K_3 = 0$$

$$\therefore F(s) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 4}\right)(1 - e^{-2s})$$

$$\therefore f(t) = \frac{1}{4}(1 - \cos 2t)u(t) - \frac{1}{4}[1 - \cos 2(t - 2)]\underline{u(t - 2)}$$



## 4.4 拉普拉斯逆变换

### ■ 部分分式展开法

#### • 有多重极点

$$F(s) = \frac{A(s)}{(s - p_1)^k D(s)}$$

$$F(s) = \frac{K_{11}}{(s - p_1)^k} + \frac{K_{12}}{(s - p_1)^{k-1}} + \dots + \frac{K_{1k}}{(s - p_1)} + \frac{E(s)}{D(s)}$$

$$K_{1i} = \frac{1}{(i-1)!} \cdot \frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}} [(s - p_1)^k F(s)] \Big|_{s=p_1},$$

$$f(t) = \frac{K_{11}}{(k-1)!} t^{k-1} e^{p_1 t} + \frac{K_{12}}{(k-2)!} t^{k-2} e^{p_1 t} + \dots + K_{1k} e^{p_1 t} + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{E(s)}{D(s)} \right]$$



## 4.4 拉普拉斯逆变换

### ■ 部分分式展开法

**例：** 求  $F(s) = \frac{s-2}{s(s+1)^3}$  的逆变换。

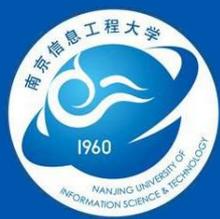
**解：**  $F(s) = \frac{K_{11}}{(s+1)^3} + \frac{K_{12}}{(s+1)^2} + \frac{K_{13}}{(s+1)} + \frac{K_2}{s}$        $F_1(s) = (s+1)^3 F(s) = \frac{s-2}{s}$

$$K_{11} = \underline{F_1(s)} \Big|_{s=-1} = 3 \qquad K_{12} = \frac{1}{(2-1)!} \cdot \frac{d}{ds} \underline{F_1(s)} \Big|_{s=-1} = 2$$

$$K_{13} = \frac{1}{(3-1)!} \cdot \frac{d^2}{ds^2} \underline{F_1(s)} \Big|_{s=-1} = 2 \qquad K_2 = \underline{sF(s)} \Big|_{s=0} = -2$$

$$\therefore F(s) = \frac{3}{(s+1)^3} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{2}{(s+1)} - \frac{2}{s}$$

$$\therefore f(t) = \left( \frac{3}{2} t^2 e^{-t} + 2te^{-t} + 2e^{-t} - 2 \right) u(t)$$



## 4.4 拉普拉斯逆变换

### ■ 部分分式展开法

**例：** 求  $F(s) = \frac{2s^2 + 3s + 1}{s^3 + 2s^2}$  的逆变换。

**解：**  $F(s) = \frac{2s^2 + 3s + 1}{s^3 + 2s^2} = \frac{k_{11}}{s^2} + \frac{k_{12}}{s} + \frac{k_2}{s+2}$

$$k_{11} = \frac{1}{2}, \quad k_{12} = \frac{5}{4}, \quad k_2 = \frac{3}{4}$$

$$\therefore F(s) = \frac{\frac{1}{2}}{s^2} + \frac{\frac{5}{4}}{s} + \frac{\frac{3}{4}}{s+2}$$

$$\therefore f(t) = \left(\frac{1}{2}t + \frac{5}{4} + \frac{3}{4}e^{-2t}\right)u(t)$$



## 4.4 拉普拉斯逆变换

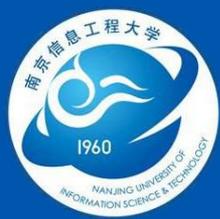
### ■ 部分分式展开法

**例：** 求  $F(s) = \frac{4s^3 + 16s^2 + 23s + 13}{(s+1)^3(s+2)}$  的逆变换。

**解：**  $F(s) = \frac{4s^3 + 16s^2 + 23s + 13}{(s+1)^3(s+2)} = \frac{K_1}{(s+1)^3} + \frac{K_2}{(s+1)^2} + \frac{K_3}{(s+1)} + \frac{K_4}{s+2}$

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)^3} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{3}{(s+1)} + \frac{1}{s+2}$$

$$\therefore f(t) = (t^2 e^{-t} + t e^{-t} + 3e^{-t} + e^{-2t})u(t)$$



## 4.4 拉普拉斯逆变换

### ■ 留数法

拉普拉斯逆变换：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds, \quad (t \geq 0)$$

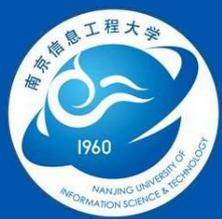
$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds = \sum_{i=1}^n \text{Res}[F(s)e^{st}] \Big|_{s=p_i}$$

若  $p_i$  为  $k$  阶极点，则

$$\text{Res}[F(s)e^{st}] \Big|_{s=p_i} = \frac{1}{(k-1)!} \left[ \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} (s-p_i)^k F(s)e^{st} \right] \Big|_{s=p_i}$$

若  $p_i$  为一阶极点，则

$$\text{Res}[F(s)e^{st}] \Big|_{s=p_i} = [(s-p_i)F(s)e^{st}] \Big|_{s=p_i}$$



## 4.4 拉普拉斯逆变换

### ■ 利用拉普拉斯变换的性质

**例：**求下列函数的拉氏反变换。

$$(1) \frac{e^{-2(s+2)}}{s+2} \quad (2) \frac{(1+e^{-s})(1-e^{-3s})}{s}$$

**解：** (1)  $\frac{1}{s} \leftrightarrow u(t)$      $\frac{1}{s} e^{-2s} \leftrightarrow u(t-2)$      $\therefore \frac{e^{-2(s+2)}}{s+2} \leftrightarrow u(t-2)e^{-2t}$

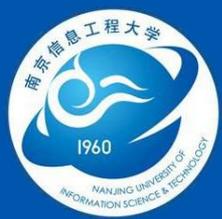
$$(2) \frac{(1+e^{-s})(1-e^{-3s})}{s} = \frac{1+e^{-s}-e^{-3s}-e^{-4s}}{s}$$

$$\leftrightarrow u(t) + u(t-1) - u(t-3) - u(t-4)$$

或  $\frac{1+e^{-s}}{s} \leftrightarrow u(t) + u(t-1)$ ,     $1-e^{-3s} \leftrightarrow \delta(t) - \delta(t-3)$

$$\text{原式} \leftrightarrow [u(t) + u(t-1)] * [\delta(t) - \delta(t-3)]$$

$$= u(t) + u(t-1) - u(t-3) - u(t-4)$$



## 4.4 拉普拉斯逆变换

### ■ 利用拉普拉斯变换的性质

**例：**求下列函数的拉氏反变换。

$$(1) \frac{e^{-2(s+2)}}{s+2} \quad (2) \frac{(1+e^{-s})(1-e^{-3s})}{s}$$

**解：** (1)  $\frac{1}{s} \leftrightarrow u(t)$      $\frac{1}{s} e^{-2s} \leftrightarrow u(t-2)$      $\therefore \frac{e^{-2(s+2)}}{s+2} \leftrightarrow u(t-2)e^{-2t}$

$$(2) \frac{(1+e^{-s})(1-e^{-3s})}{s} = \frac{1+e^{-s}-e^{-3s}-e^{-4s}}{s}$$

$$\leftrightarrow u(t) + u(t-1) - u(t-3) - u(t-4)$$

或  $\frac{1+e^{-s}}{s} \leftrightarrow u(t) + u(t-1)$ ,     $1-e^{-3s} \leftrightarrow \delta(t) - \delta(t-3)$

$$\text{原式} \leftrightarrow [u(t) + u(t-1)] * [\delta(t) - \delta(t-3)]$$

$$= u(t) + u(t-1) - u(t-3) - u(t-4)$$



## 4.4 拉普拉斯逆变换

### ■ 利用拉普拉斯变换的性质

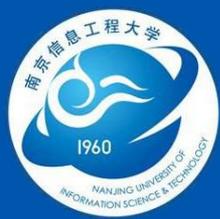
**例：** 求  $F(s) = \frac{1 - e^{-2s}}{s(s^2 + 4)}$  的逆变换。

**解：**  $\frac{1 - e^{-2s}}{s(s^2 + 4)} = \frac{1}{s(s^2 + 4)} - \frac{1}{s(s^2 + 4)} e^{-2s}$

$$\frac{1}{s(s^2 + 4)} = \frac{1}{4} + \frac{-\frac{1}{4}s}{s^2 + 4} \leftrightarrow \frac{1}{4}(1 - \cos 2t)u(t)$$

$$\frac{1}{s(s^2 + 4)} e^{-2s} \leftrightarrow \frac{1}{4}[1 - \cos 2(t - 2)]u(t - 2)$$

$$\therefore F(s) \leftrightarrow \frac{1}{4}(1 - \cos 2t)u(t) - \frac{1}{4}[1 - \cos 2(t - 2)]u(t - 2)$$



## 4.4 拉普拉斯逆变换

### ■ 利用微分特性求解微分方程

- 一般而言，如果单输入-单输出系统的激励为 $e(t)$ ，响应为 $r(t)$ ，则描述LTI连续系统的激励和响应之间关系的数学模型是 $n$ 阶常系数线性微分方程，

$$r^{(n)}(t) + a_{n-1}r^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1r^{(1)}(t) + a_0r(t) = b_m e^{(m)}(t) + b_{m-1}e^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1e^{(1)}(t) + b_0e(t)$$

即：
$$\sum_{i=0}^n a_i r^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j e^{(j)}(t)$$

其中， $a_i(i=0,1,\dots,n)$ ， $b_j(j=0,1,\dots,m)$ 均为常数，且 $a_n=1$ 。

系统的初始状态为 $y(0^-)$ ， $y^{(1)}(0^-)$ ， $\dots$ ， $y^{(n-1)}(0^-)$ 。



# 4.4 拉普拉斯逆变换

## ■ 利用微分特性求解微分方程

求解思路：用拉普拉斯变换微分特性

$$r^{(i)}(t) \leftrightarrow s^i R(s) - \sum_{p=0}^{i-1} s^{i-1-p} r^{(p)}(0_-)$$

**s域的代数方程**

若 $e(t)$ 在 $t=0$ 时接入系统，则  $e^{(j)}(t) \leftrightarrow s^j E(s)$

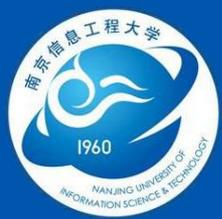
$$\left[ \sum_{i=0}^n a_i s^i \right] R(s) - \sum_{i=0}^n a_i \left[ \sum_{p=0}^{i-1} s^{i-1-p} r^{(p)}(0_-) \right] = \left[ \sum_{j=0}^m b_j s^j \right] E(s)$$

$$\Rightarrow R(s) = \frac{\sum_{i=0}^n a_i \left[ \sum_{p=0}^{i-1} s^{i-1-p} r^{(p)}(0_-) \right]}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} + \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} E(s)$$

$\mathbf{r(t)}$  ←

$\mathbf{Rzi(s)}$

$\mathbf{Rzs(s)}$



## 4.4 拉普拉斯逆变换

### ■ 利用微分特性求解微分方程

**例：**描述某LTI系统的微分方程为

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 2f'(t) + 6f(t)$$

已知起始状态  $y(0^-) = 1$ ,  $y'(0^-) = -1$ , 激励  $f(t) = 5e^{-t}u(t)$ , 求系统的全响应  $y(t)$ 。

**解：**方程取拉氏变换，并整理得

若已知  $y(0^+) = 1$ ,  
 $y'(0^+) = 9$

$$\begin{aligned} Y(s) &= \underbrace{\frac{sy(0_-) + y'(0_-) + 5y(0_-)}{s^2 + 5s + 6}}_{Y_{zi}(s)} + \underbrace{\frac{2(s+3)}{s^2 + 5s + 6} F(s)}_{Y_{zs}(s)} \quad F(s) = \frac{5}{s+1} \\ &= \frac{s+4}{(s+2)(s+3)} + \frac{2}{s+2} \frac{5}{s+1} = \frac{2}{s+2} + \frac{-1}{s+3} + \frac{-10}{s+2} + \frac{10}{s+1} \\ &= \frac{-1}{s+3} + \frac{-8}{s+2} + \frac{10}{s+1} \quad \Rightarrow y(t) = (-e^{-3t} - 8e^{-2t} + 10e^{-t})u(t) \end{aligned}$$



## 4.5 利用拉普拉斯变换法进行电路分析

**电路系统的分析和求解通常有两种方式：**

- (1)先根据时域定理列写微分方程，然后在时域求解微分方程；**
- (2)列写微分方程，用拉氏变换求解。**

**它们都有一个共同难点就是列写微分方程。**

**我们提出第三种方式：**

- (3)利用s域元件模型分析电路，及复频域分析法。**



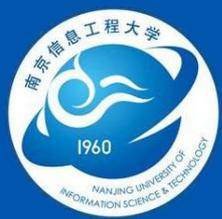
## 4.5 利用拉普拉斯变换法进行电路分析

### ■ 电路定理的推广

$$i(t) \leftrightarrow I(s) \quad \text{KCL} : \sum i(t) = 0 \rightarrow \sum I(s) = 0$$

$$v(t) \leftrightarrow V(s) \quad \text{KVL} : \sum v(t) = 0 \rightarrow \sum V(s) = 0$$

**※ 线性稳态电路分析的各种方法都适用。**

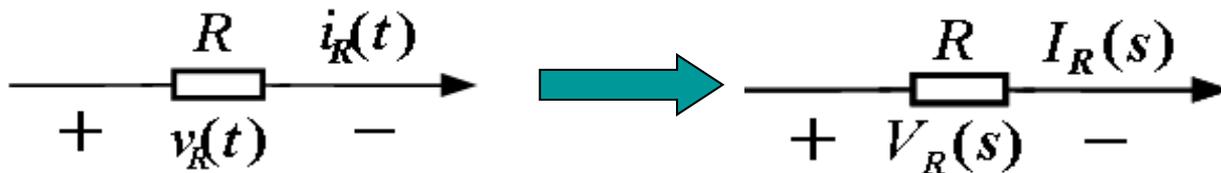


# 4.5 利用拉普拉斯变换法进行电路分析

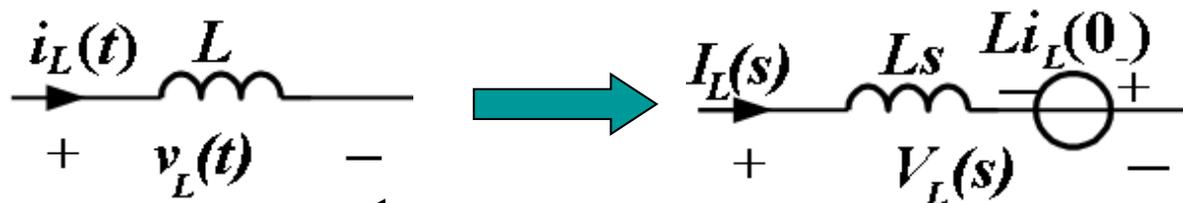
## ■ 电路元件的s域模型

### • s域电压模型（用于回路分析法）

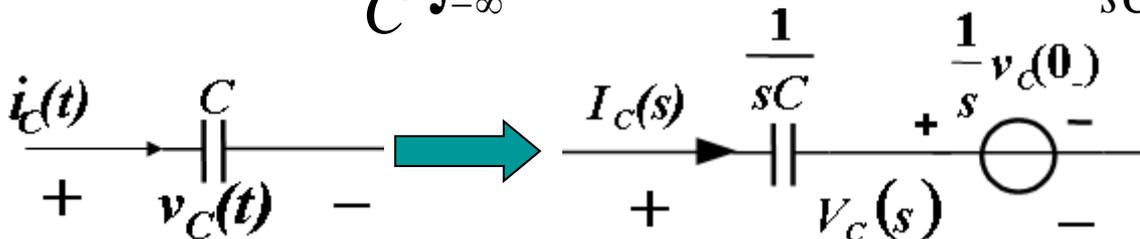
**电阻:**  $v_R(t) = i_R(t)R \Rightarrow V_R(s) = I_R(s)R$



**电感:**  $v_L(t) = Li'_L(t) \Rightarrow V_L(s) = I_L(s)Ls - Li_L(0_-)$



**电容:**  $v_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau \Rightarrow V_C(s) = I_C(s) \frac{1}{sC} + \frac{1}{s} v_C(0_-)$

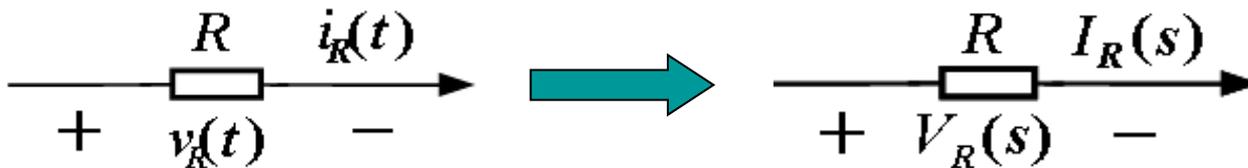


# 4.5 利用拉普拉斯变换法进行电路分析

## ■ 电路元件的s域模型

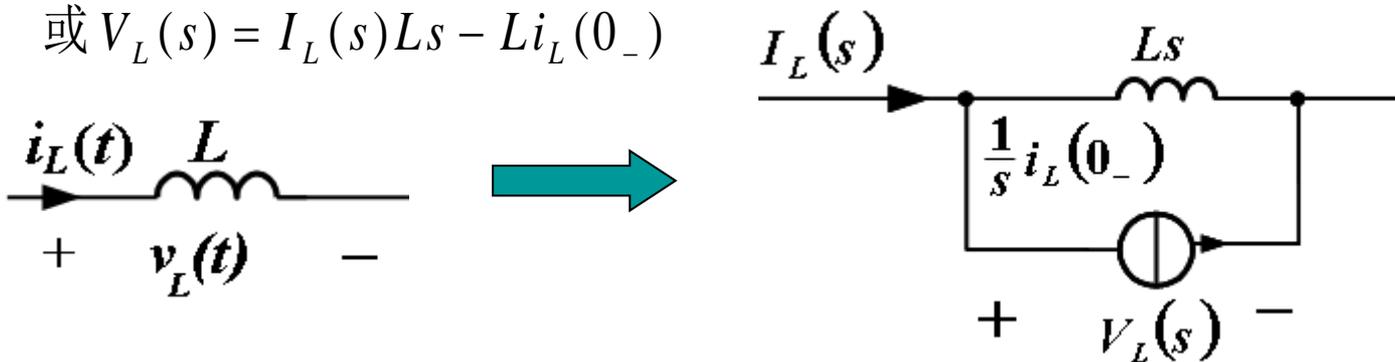
### • s域电流模型（用于节点分析法）

**电阻:**  $i_R(t) = v_R(t) / R \Rightarrow I_R(s) = V_R(s) / R$



**电感:**  $i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v_L(\tau) d\tau \Rightarrow I_L(s) = \frac{V_L(s)}{Ls} + \frac{i_L(0_-)}{s}$

或  $V_L(s) = I_L(s)Ls - Li_L(0_-)$



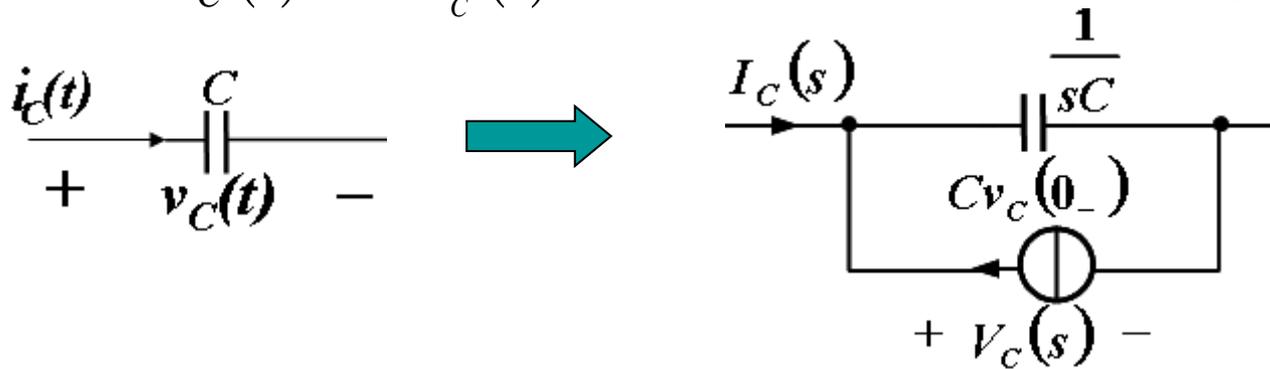


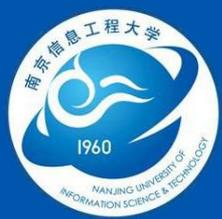
# 4.5 利用拉普拉斯变换法进行电路分析

## ■ 电路元件的s域模型

- s域电流模型（用于节点分析法）

**电容:**  $i_c(t) = Cv'_c(t) \Rightarrow I_C(s) = sCV_C(s) - Cv_C(0_-)$

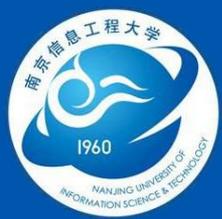




## 4.5 利用拉普拉斯变换法进行电路分析

### ■ 求响应的步骤

- ① 画0-等效电路，求起始状态；
- ② 画 $s$ 域等效模型；
- ③ 列 $s$ 域方程(代数方程)；
- ④ 解 $s$ 域方程,求出响应的拉氏变换 $V(s)$ 或 $I(s)$ ；
- ⑤ 拉氏反变换求 $v(t)$ 或 $i(t)$ 。



# 4.5 利用拉普拉斯变换法进行电路分析

## ■ 求响应的步骤

**例：**已知  $e(t) = \begin{cases} -E & t < 0 \\ E & t > 0 \end{cases}$ ，求  $v_C(t), v_R(t)$ 。

**解：**(1) 先求解  $v_C(t)$ 。  $v_C(0_-) = -E$

$$RCv'_C(t) + v_C(t) = e(t) = E \quad t > 0$$

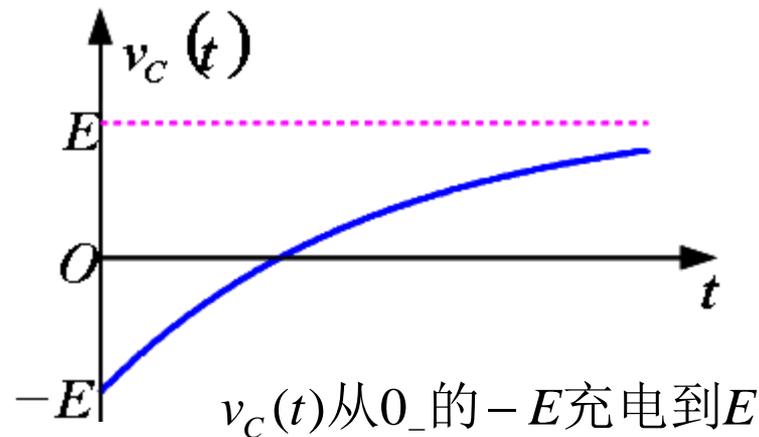
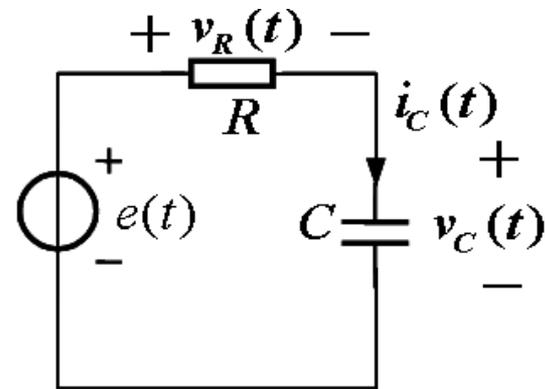
$$RC[sV_C(s) - v_C(0_-)] + V_C(s) = E/s$$

$$V_C(s) = [E/s + RCv_C(0_-)] / (1 + RCS)$$

$$= E \left( \frac{1}{RC} - s \right) / s \left( s + \frac{1}{RC} \right)$$

$$= \frac{E}{s} - \frac{2E}{s + 1/RC}$$

$$\Rightarrow v_C(t) = E - 2E e^{-\frac{t}{RC}} \quad (t \geq 0)$$





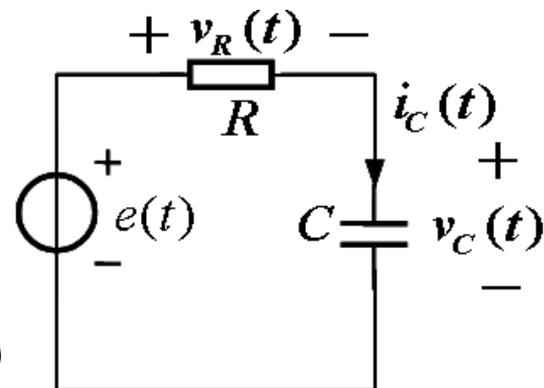
# 4.5 利用拉普拉斯变换法进行电路分析

(2) 求解  $v_R(t)$ .  $v_R(0_-) = 0, v_R(0_+) = 2E$

$$\frac{1}{C} \int_{-\infty}^t \frac{v_R(t)}{R} dt + v_R(t) = e(t)$$

$$\frac{1}{RC} v_R(t) + \frac{dv_R(t)}{dt} = \frac{de(t)}{dt}$$

$$\because e(t) = -Eu(-t) + Eu(t) \Rightarrow e'(t) = 2E\delta(t)$$

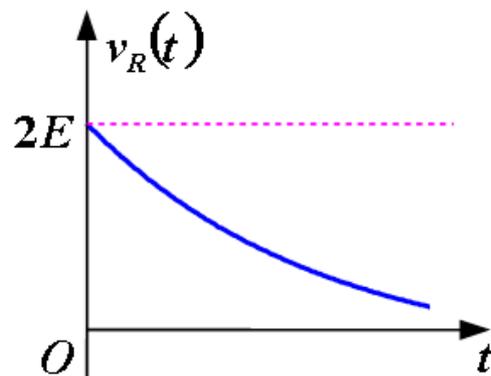


两边取拉氏变换  $\frac{1}{RC} V_R(s) + sV_R(s) - v_R(0_-) = 2E$

$$\because v_R(0_-) = 0 \quad V_R(s) = \frac{2E}{s + \frac{1}{RC}}$$

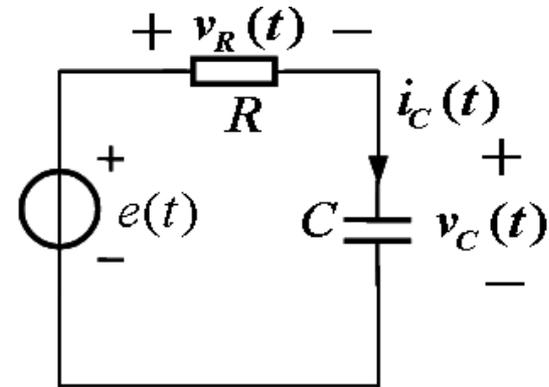
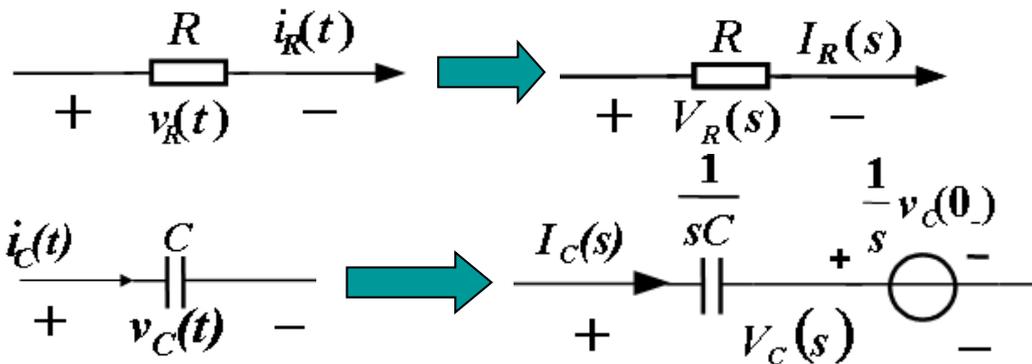
$$\Rightarrow v_R(t) = 2E e^{-\frac{t}{RC}} \quad (t \geq 0)$$

$$v_R(t) = e(t) - v_C(t) = E - (E - 2Ee^{-\frac{1}{RC}t}) \quad t > 0$$



# 4.5 利用拉普拉斯变换法进行电路分析

**另解：** 利用s域模型求解。

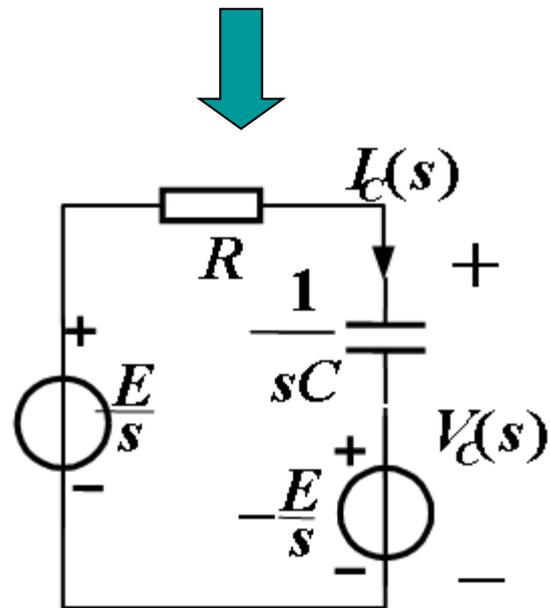


$$e(t) = -Eu(-t) + Eu(t) \quad v_C(0_-) = -E$$

$$I_C(s)(R + 1/sC) = E/s + E/s$$

$$V_C(s) = I_C(s) \cdot \frac{1}{sC} + \frac{-E}{s} = \frac{E}{s} - \frac{2E}{s + \frac{1}{RC}}$$

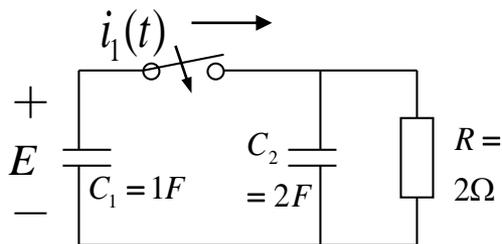
$$v_C(t) = E \left( 1 - 2e^{-\frac{t}{RC}} \right) \quad (t \geq 0)$$





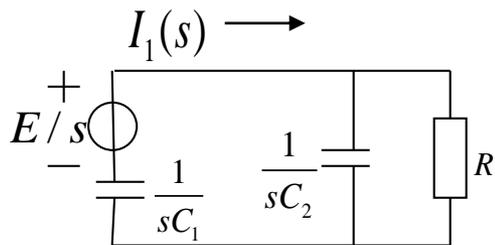
# 4.5 利用拉普拉斯变换法进行电路分析

**例：** 电路如图所示，设电容上起始电压  $v_{C1}(0^-) = E$ ， $t=0$  开关合上，求电流  $i_1(t)$ 。



**解：** 作s域电路，并列方程。

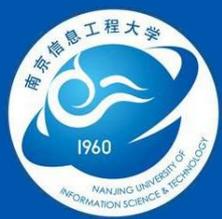
$$I_1(s) = \frac{E}{s} \frac{1}{\frac{R/sC_2}{R + 1/sC_2} + \frac{1}{sC_1}} = \frac{E}{s} \frac{1}{\frac{R}{RC_2s + 1} + \frac{1}{sC_1}}$$



$$= \frac{ERC_1C_2}{R(C_1 + C_2)} \frac{s + \frac{1}{RC_2}}{s + \frac{1}{R(C_1 + C_2)}} = \frac{2E}{3} \frac{s + \frac{1}{4}}{s + \frac{1}{6}}$$

$$I_1(s) = \frac{2E}{3} \left( 1 + \frac{\frac{1}{12}}{s + \frac{1}{6}} \right)$$

$$\therefore i_1(t) = \frac{2E}{3} \left[ \delta(t) + \frac{1}{12} e^{-\frac{t}{6}} u(t) \right]$$



## 4.6 系统函数

### ■ 系统函数与系统响应

- **系统函数** $H(s)$ : **零状态响应** $r_{zs}(t)$ 的拉氏变换与系统**激励信号** $e(t)$ 的拉氏变换的比值, 即

$$H(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathcal{L}[r_{zs}(t)]}{\mathcal{L}[e(t)]} = \frac{R_{zs}(s)}{E(s)}$$

**它只与系统的结构、元件参数有关, 而与激励、初始状态无关。**

由连续时间系统中时域分析可知:

$$r_{zs}(t) = h(t) * e(t) \quad \longrightarrow \quad R_{zs}(s) = \mathcal{L}[h(t)]E(s) = H(s)E(s)$$

$$\longrightarrow \quad H(s) = \mathcal{L}[h(t)] \quad \longrightarrow \quad h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)]$$

$$\longrightarrow \quad r_{zs}(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)E(s)]$$



## 4.6 系统函数

**例：**已知  $f(t)=e^{-t}u(t)$  时，LTI因果系统零状态响应

$$y_{zs}(t) = (3e^{-t} - 4e^{-2t} + e^{-3t})u(t)$$

求该系统的单位冲激响应和微分方程。

**解：**

$$H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{F(s)} = \frac{3\frac{1}{s+1} - 4\frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+3}}{\frac{1}{s+1}} = 3 - 4\frac{s+1}{s+2} + \frac{s+1}{s+3} = \frac{4}{s+2} + \frac{-2}{s+3}$$
$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = (4e^{-2t} - 2e^{-3t})u(t) = \frac{2s+8}{s^2+5s+6}$$

$$s^2 Y_{zs}(s) + 5s Y_{zs}(s) + 6 Y_{zs}(s) = 2s F(s) + 8 F(s)$$

**取逆变换**  $y_{zs}''(t) + 5y_{zs}'(t) + 6y_{zs}(t) = 2f'(t) + 8f(t)$

**微分方程为**  $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 2f'(t) + 8f(t)$



## 4.6 系统函数

**例：** 已知系统  $r''(t) + 5r'(t) + 6r(t) = 2e''(t) + 6e'(t)$ ，激励为  $e(t) = (1 + e^{-t})u(t)$ ，求系统单位冲激响应  $h(t)$  和零状态响应  $r_{zs}(t)$ 。

**解：** 在零起始状态下对原方程两端取拉氏变换

$$s^2 R(s) + 5sR(s) + 6R(s) = 2s^2 E(s) + 6sE(s)$$

$$H(s) = \frac{R(s)}{E(s)} = \frac{2s}{s+2} = 2 - \frac{4}{s+2}$$

$$\Rightarrow h(t) = 2\delta(t) - 4e^{-2t} u(t)$$

$$r_{zs}(t) = h(t) * e(t) \Rightarrow R_{zs}(s) = H(s) \cdot E(s)$$

$$R_{zs}(s) = \frac{2s}{s+2} \cdot \frac{2s+1}{s(s+1)} = \frac{2(2s+1)}{(s+2)(s+1)} = \frac{6}{s+2} - \frac{2}{s+1}$$

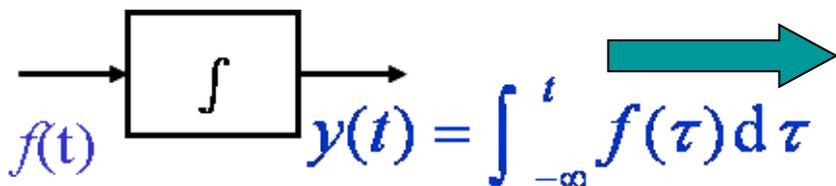
$$\Rightarrow r_{zs}(t) = (6e^{-2t} - 2e^{-t})u(t)$$



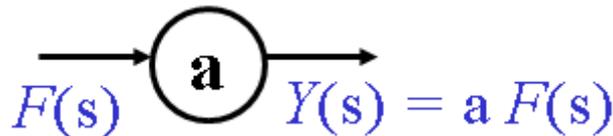
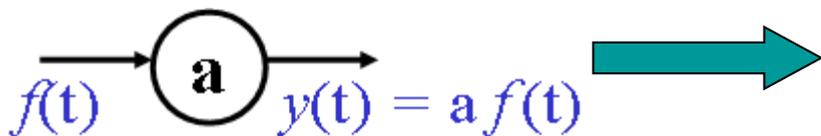
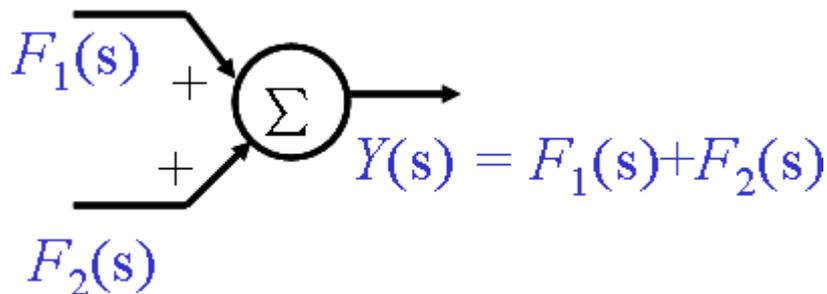
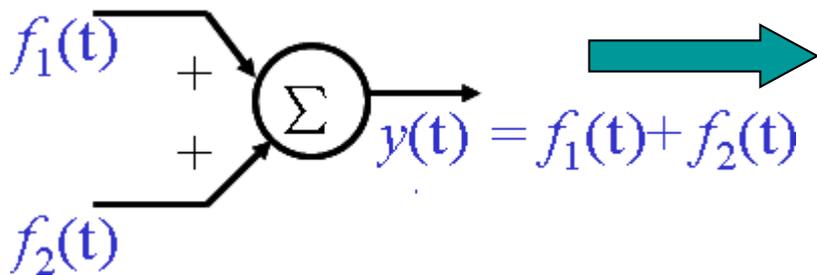
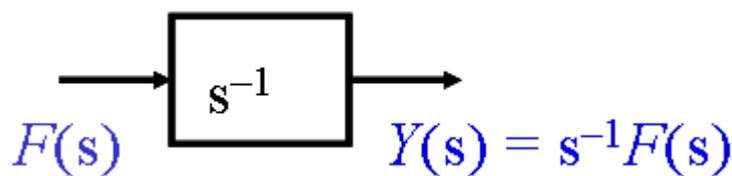
# 4.6 系统函数

## ■ 系统的s域框图与系统的微分方程

### 时域框图基本单元



### s域框图基本单元

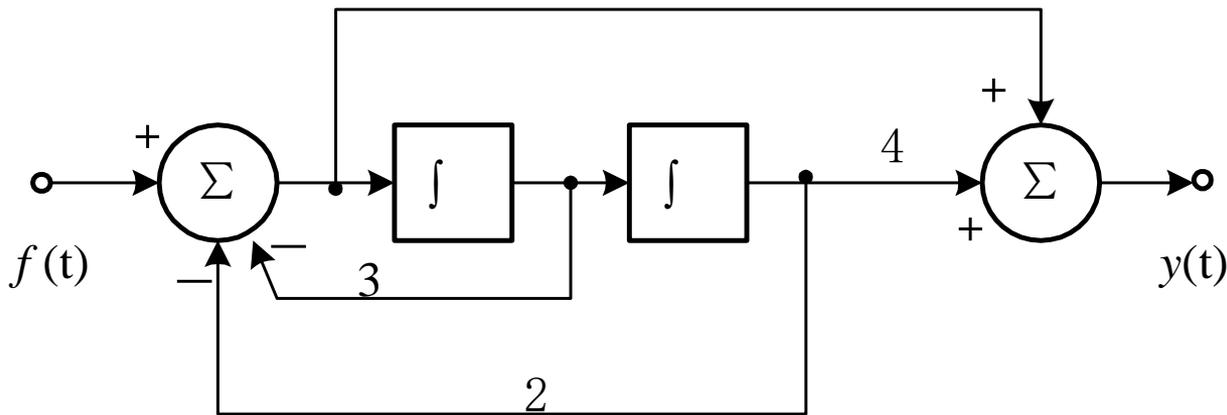


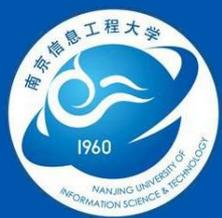


# 4.6 系统函数

## ■ 系统的s域框图与系统的微分方程

**例：** 如图所示框图，列出微分方程。 1

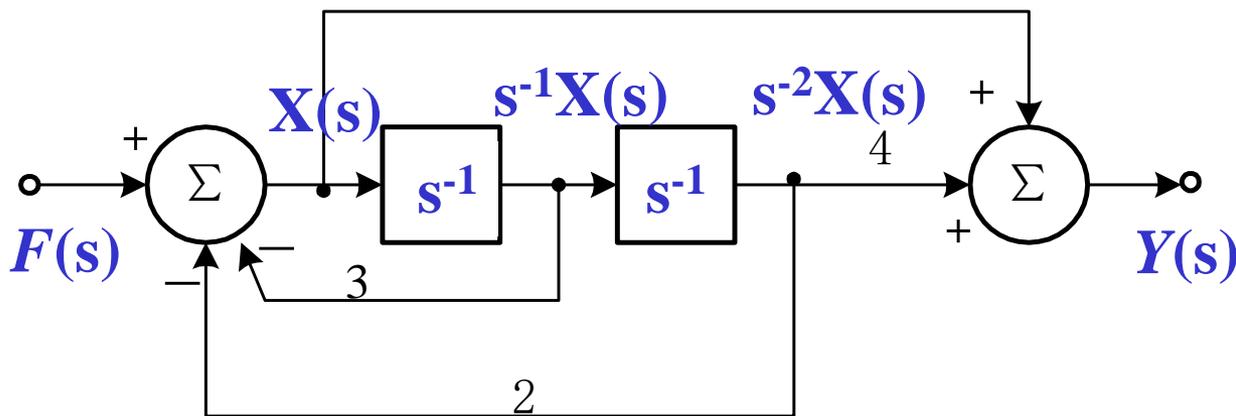




# 4.6 系统函数

## ■ 系统的s域框图与系统的微分方程

**例：** 如图所示框图，列出微分方程。 1



**解：** 画出s域框图。 设左边加法器输出为X(s)

$$X(s) = F(s) - 3s^{-1}X(s) - 2s^{-2}X(s) \quad X(s) = \frac{1}{1 + 3s^{-1} + 2s^{-2}} F(s)$$

$$Y(s) = X(s) + 4s^{-2}X(s) = \frac{1 + 4s^{-2}}{1 + 3s^{-1} + 2s^{-2}} F(s) = \frac{s^2 + 4}{s^2 + 3s + 2} F(s)$$

微分方程为： $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = f''(t) + 4f(t)$



## 4.7 系统函数及其时域分析

### ■ 零极点及零极点图

$$H(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_j) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_k) \cdots (s - p_n)}$$

$$= K \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{k=1}^n (s - p_k)}$$

$z_1, z_2, \dots, z_m$  为系统函数的零点。

$p_1, p_2, \dots, p_m$  为系统函数的极点。

在s平面上，画出 $H(s)$ 的零极点，

极点用×表示，零点用○表示，称为**零极点图**。



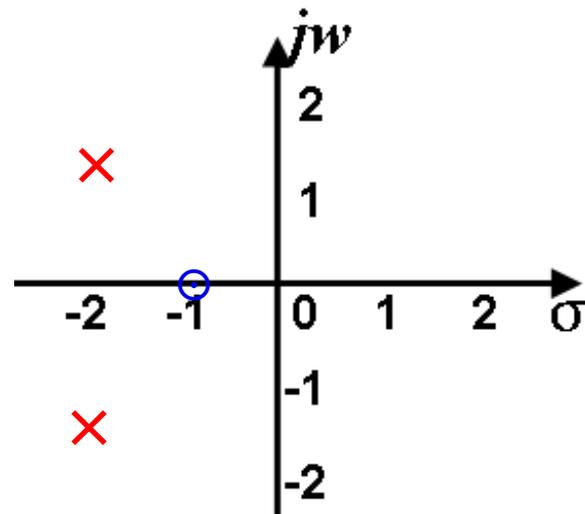
# 4.7 系统函数及其时域分析

## ■ 零极点及零极点图

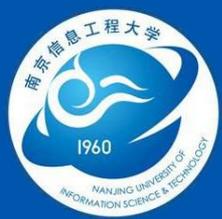
**例：** 已知系统微分方程为  $y''(t) + 4y'(t) + 6y(t) = f'(t) + f(t)$   
求系统函数并画出零极点图。

**解：** 系统函数为

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{s+1}{s^2 + 4s + 6} = \frac{s+1}{(s+2)^2 + 2}$$
$$= \frac{s+1}{(s+2 + j\sqrt{2})(s+2 - j\sqrt{2})}$$



零点为：  $z = -1$ ； 极点为：  $p_1 = -2 - j\sqrt{2}$ ,  $p_2 = -2 + j\sqrt{2}$



# 4.7 系统函数及其时域分析

## ■ $H(s)$ 极点分布与时域函数的对应关系

一 阶 极 点 分 布 与 时 域 特 性	$H(s) = 1/s$ , $p_1 = 0$ 在原点, $\Rightarrow h(t) = L^{-1}[H(s)] = u(t)$
	$H(s) = 1/s + a$ , $p_1 = -a$ 极点在实轴上 $a > 0$ , 在左实轴上, $h(t) = e^{-at} u(t)$ , 指数衰减 $a < 0$ , 在右实轴上, $h(t) = e^{-at} u(t)$ , $-a > 0$ , 指数增加
	$H(s) = \omega/(s^2 + \omega^2)$ , $p_{1,2} = \pm j\omega$ , 在虚轴上 $h(t) = \sin \omega t u(t)$ , 等幅振荡
	$H(s) = \frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$ , $p_1 = -\alpha + j\omega$ , $p_2 = -\alpha - j\omega$ , 共轭根 $h(t) = e^{-at} \sin \omega t u(t)$ 当 $a > 0$ , 极点在左半平面, 衰减振荡 当 $a < 0$ , 极点在右半平面, 增幅振荡



## 4.7 系统函数及其时域分析

### ■ $H(s)$ 极点分布与时域函数的对应关系

二阶极点分布	$H(s) = 1/s^2$ , 极点在原点, $h(t) = tu(t), t \rightarrow \infty, h(t) \rightarrow \infty$
	$H(s) = 1/(s+a)^2$ , 极点在实轴上, $h(t) = te^{-\alpha t} u(t), \alpha > 0, t \rightarrow \infty, h(t) \rightarrow 0$
	$H(s) = 2s/(s^2 + \omega^2)^2$ , 在虚轴上, $h(t) = t \sin tu(t), t \rightarrow \infty, h(t)$ 增幅振荡

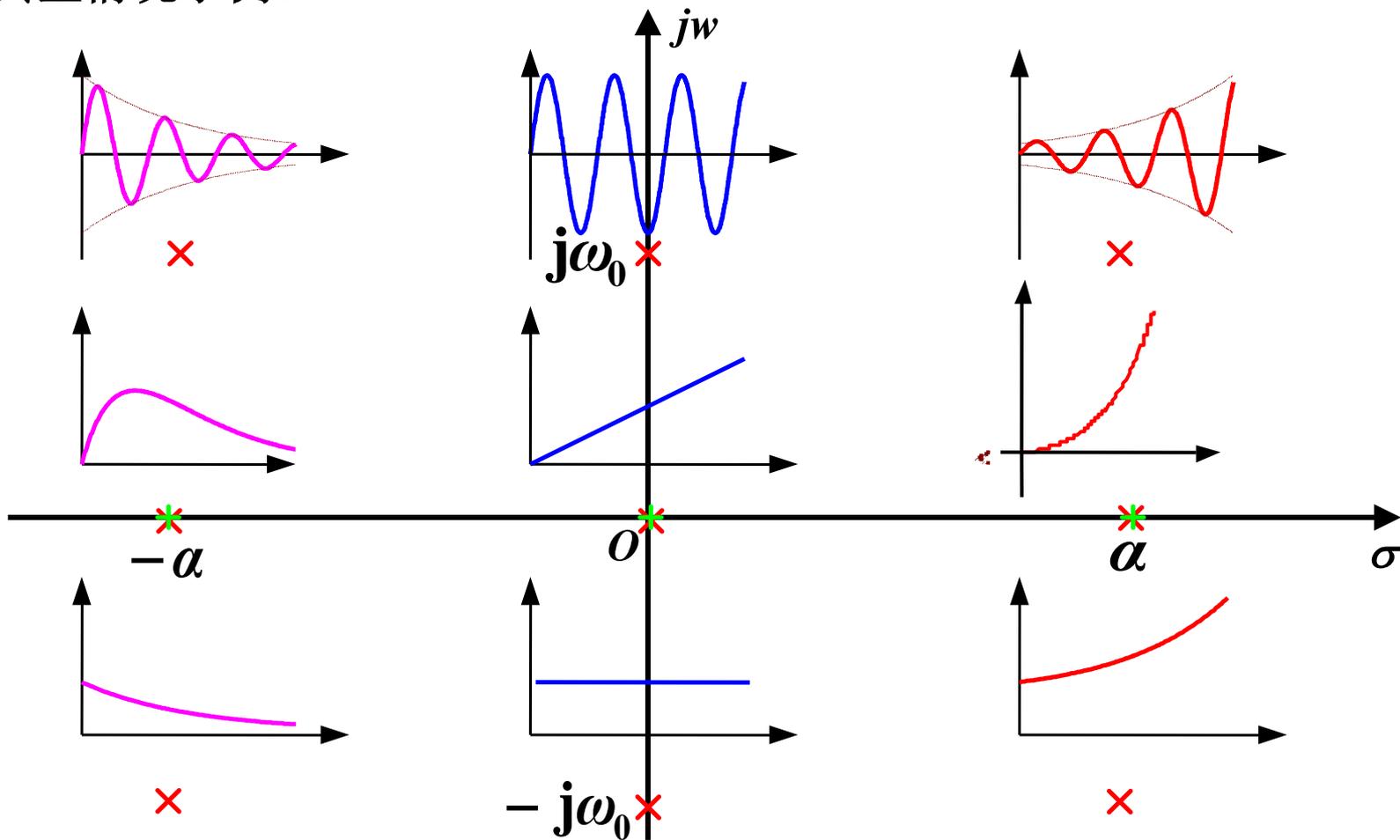
**有实际物理意义的系统都是因果稳定系统，即随 $t \uparrow$ ,  $h(t) \rightarrow 0$ ，这表明 $H(s)$ 的极点位于左半平面，由此可知，收敛域包括虚轴 $j\omega$ ,  $H(s)$ 和 $H(j\omega)$ 均存在，两者可相互推算，只需  $s \rightarrow j\omega$  将即可。**

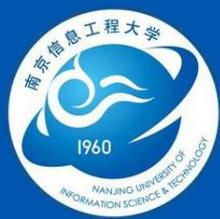


# 4.7 系统函数及其时域分析

## ■ $H(s)$ 极点分布与时域函数的对应关系

几种典型情况示例：





## 4.7 系统函数及其时域分析

### ■ $H(s)$ 、 $E(s)$ 的极点分布与自由响应、强迫响应特性的对应

$$e(t) \leftrightarrow E(s) \quad h(t) \leftrightarrow H(s) \quad r(t) \leftrightarrow R(s)$$

$$E(s) = \frac{\prod_{l=1}^u (s - z_l)}{\prod_{k=1}^v (s - P_k)} \quad H(s) = \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - P_i)} \quad R(s) = \frac{\prod_{l=1}^u (s - z_l)}{\prod_{k=1}^v (s - P_k)} \cdot \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

$$R(s) = \sum_{k=1}^v \frac{A_k}{s - p_k} + \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s - p_i}$$

$$r(t) = \mathcal{L}^{-1}[R(s)] = \sum_{k=1}^v A_k e^{p_k t} u(t) + \sum_{i=1}^n A_i e^{p_i t} u(t)$$

= 强迫响应分量 + 自由响应分量



## 4.7 系统函数及其时域分析

### ■ $H(s)$ 、 $E(s)$ 的极点分布与自由响应、强迫响应特性的对应

(1) 响应函数  $r(t)$  由两部分组成：

系统函数的极点→自由响应分量；

激励函数的极点→强迫响应分量。

(2) 定义系统特征方程的根为系统的固有频率(或称“自然频率”、“自由频率”)。 $H(s)$ 的极点都是系统的固有频率； $H(s)$ 零、极点相消时，某些固有频率将丢失。

(3) 自由响应只由系统本身的特性所决定，与激励函数的形式无关，然而系数  $A_i, A_k$  与  $H(s), E(s)$  都有关。

(4) 瞬态响应是指激励信号接入以后，完全响应中瞬时出现的有关成分，随着  $t$  增大，将消失。

稳态响应 = 完全响应 - 瞬态响应

稳态响应不会随时间的增大而消失。



## 4.7 系统函数及其时域分析

### ■ $H(s)$ 、 $E(s)$ 的极点分布与自由响应、强迫响应特性的对应

**例：** 已知系统微分方程为  $r''(t)+3r'(t)+2r(t)=e'(t)+3e(t)$ ，激励  $e(t)=u(t)$ ，起始状态为  $r(0_-)=1, r'(0_-)=2$ ，求完全响应，并指出其零输入响应、零状态响应、自由响应、强迫响应分量、暂态响应分量和稳态响应分量。

**解：** 方程两端取拉氏变换

$$[s^2 R(s) - sr(0_-) - r'(0_-)] + 3[sR(s) - r(0_-)] + 2R(s) = sE(s) + 3E(s)$$

$$(s^2 + 3s + 2)R(s) = (s + 3)E(s) + sr(0_-) + r'(0_-) + 3r(0_-)$$

$$R_{zi}(s) = \frac{sr(0_-) + r'(0_-) + 3r(0_-)}{s^2 + 3s + 2}$$

$$R_{zs}(s) = \frac{(s + 3)E(s)}{s^2 + 3s + 2}$$

$$r_{zi}(t) = (4e^{-t} - 3e^{-2t})u(t)$$

$$r_{zs}(t) = (0.5e^{-2t} - 2e^{-t} + 1.5)u(t)$$

$$R(s) = 1.5 \frac{1}{s} + 2 \frac{1}{s+1} + 2.5 \frac{1}{s+2}$$

$$r(t) = (1.5 + 2e^{-t} + 2.5e^{-2t})u(t)$$



## 4.7 系统函数及其时域分析

### ■ $H(s)$ 、 $E(s)$ 的极点分布与自由响应、强迫响应特性的对应

**例：** 已知系统微分方程为  $r''(t)+3r'(t)+2r(t)=e'(t)+3e(t)$ ，激励  $e(t)=u(t)$ ，起始状态为  $r(0_-)=1, r'(0_-)=2$ ，求完全响应，并指出其零输入响应、零状态响应、自由响应、强迫响应分量、暂态响应分量和稳态响应分量。

**解：**

$$R(s) = 1.5 \frac{1}{s} + 2 \frac{1}{s+1} + 2.5 \frac{1}{s+2}$$

极点位于虚轴      极点位于  $s$  左半平面

$$r(t) = (1.5 + 2e^{-t} + 2.5e^{-2t})u(t)$$

稳态响应      暂态响应

$$R(s) = 1.5 \frac{1}{s} + 2 \frac{1}{s+1} + 2.5 \frac{1}{s+2}$$

$E(s)$ 的极点       $H(s)$ 的极点

$$r(t) = (1.5 + 2e^{-t} + 2.5e^{-2t})u(t)$$

强迫响应      自由响应



## 4.8 系统函数及其频域分析

### ■ 频响特性

- **频响特性**：系统在**正弦信号激励**下**稳态响应**随输入正弦信号**频率**变化而变化的情况。包括幅度和相位两个方面。

设系统函数为 $H(s)$ ，正弦激励信号为：

$$e(t) = E_m \sin(\omega_0 t) \quad \Rightarrow \quad E(s) = \frac{E_m \omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

则系统响应 $r(t)$ 的拉氏变换式为：

$$\begin{aligned} R(s) &= H(s)E(s) = H(s) \cdot \frac{E_m \omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \\ &= \frac{K_{-j\omega_0}}{s + j\omega_0} + \frac{K_{j\omega_0}}{s - j\omega_0} + \frac{K_1}{s - p_1} + \frac{K_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{K_n}{s - p_n} \end{aligned}$$



## 4.8 系统函数及其频域分析

### ■ 频响特性

$$R(s) = H(s) \cdot \frac{E_m \omega_0}{s^2 + \omega_0^2} = \frac{K_{-j\omega_0}}{s + j\omega_0} + \frac{K_{j\omega_0}}{s - j\omega_0} + \frac{K_1}{s - p_1} + \frac{K_2}{s - p_2} + \dots + \frac{K_n}{s - p_n}$$

$$\begin{aligned} K_{-j\omega_0} &= (s + j\omega_0)R(s) \Big|_{s=-j\omega_0} = (s + j\omega_0) \frac{E_m \omega_0}{s^2 + \omega_0^2} H(s) \Big|_{s=-j\omega_0} \\ &= \frac{E_m \omega_0}{-2j\omega_0} H(-j\omega_0) = \frac{E_m}{-2j} H(-j\omega_0) = \frac{E_m}{-2j} |H(j\omega_0)| e^{-j\phi_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{j\omega_0} &= (s - j\omega_0)R(s) \Big|_{s=j\omega_0} = (s - j\omega_0) \frac{E_m \omega_0}{s^2 + \omega_0^2} H(s) \Big|_{s=j\omega_0} \\ &= \frac{E_m \omega_0}{2j\omega_0} H(j\omega_0) = \frac{E_m}{2j} H(j\omega_0) = \frac{E_m}{2j} |H(j\omega_0)| e^{j\phi_0} \end{aligned}$$

$$R(s) = \frac{E_m}{2j} |H(j\omega_0)| \left( -\frac{e^{-j\phi_0}}{s + j\omega_0} + \frac{e^{j\phi_0}}{s - j\omega_0} \right) + \frac{K_1}{s - p_1} + \frac{K_2}{s - p_2} + \dots + \frac{K_n}{s - p_n}$$



## 4.8 系统函数及其频域分析

### ■ 频响特性

$$R(s) = \frac{E_m}{2j} |H(j\omega_0)| \left( -\frac{e^{-j\phi_0}}{s + j\omega_0} + \frac{e^{j\phi_0}}{s - j\omega_0} \right) + \frac{K_1}{s - p_1} + \frac{K_2}{s - p_2} + \dots + \frac{K_n}{s - p_n}$$

$$\Rightarrow r(t) = \frac{E_m}{2j} |H(j\omega_0)| (-e^{-j\phi_0} e^{-j\omega_0 t} + e^{j\phi_0} e^{j\omega_0 t}) + \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t}$$

$$r_{ss}(t) = \frac{E_m}{2j} |H(j\omega_0)| (-e^{-j(\omega_0 t + \phi_0)} + e^{j(\omega_0 t + \phi_0)}) = E_m |H(j\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \phi_0)$$

可见，系统在频率为  $\omega_0$  的正弦信号激励下的稳态响应仍为同频率的正弦信号，只是幅度乘以  $|H(j\omega_0)|$ ，而相位移动  $\phi_0$ 。

$$H(j\omega_0) = H(s) \Big|_{s=j\omega_0} = |H(j\omega_0)| e^{j\phi_0}$$

当正弦信号的频率为变量  $\omega$  时：

$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega} = |H(j\omega)| e^{j\phi(\omega)}$$

系统对不同频率的输入信号，响应也不相同。

幅频响应

相频响应



## 4.8 系统函数及其频域分析

### ■ 频响特性

※ 频响特性分析的前提是：其收敛域包括虚轴

$$\because H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega} = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

即是拉氏变换和傅立叶变换同时存在。

因此,系统必须是稳定的因果系统.

有实际意义的物理系统都是稳定的因果系统.

因果:  $h(t) = h(t)u(t)$  为因果信号.

$$H(s) \Rightarrow ROC: \sigma > \sigma_0$$

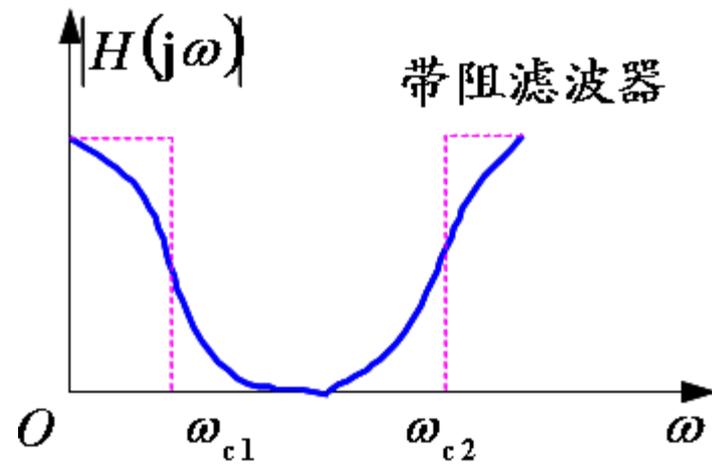
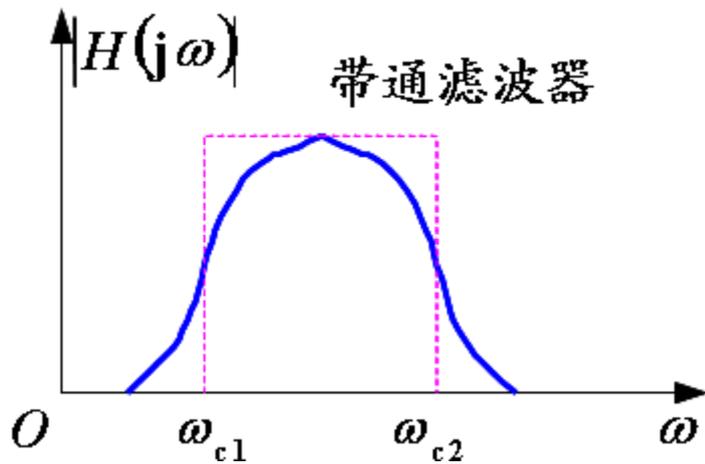
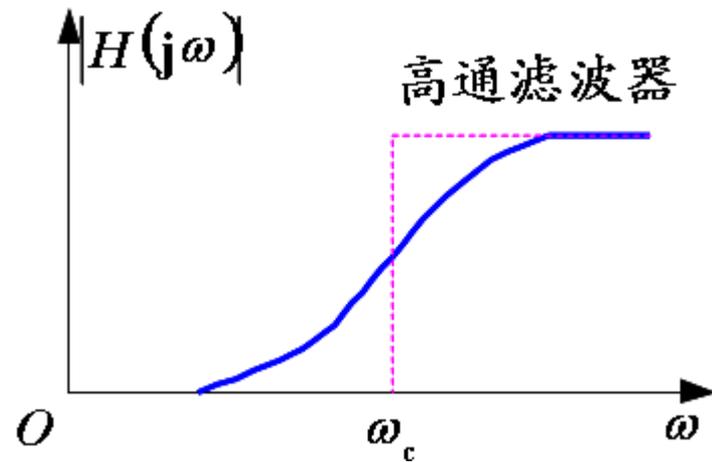
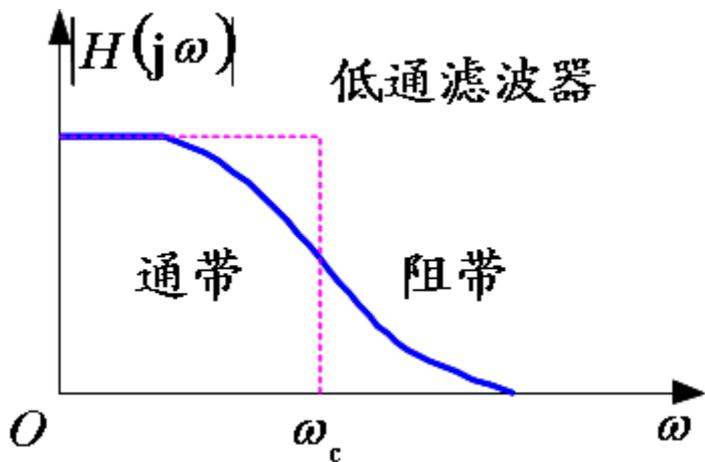
稳定:  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$

$H(s)$ 的全部极点落在 $s$ 左半平面



# 4.8 系统函数及其频域分析

## ■ 几种常见的滤波器

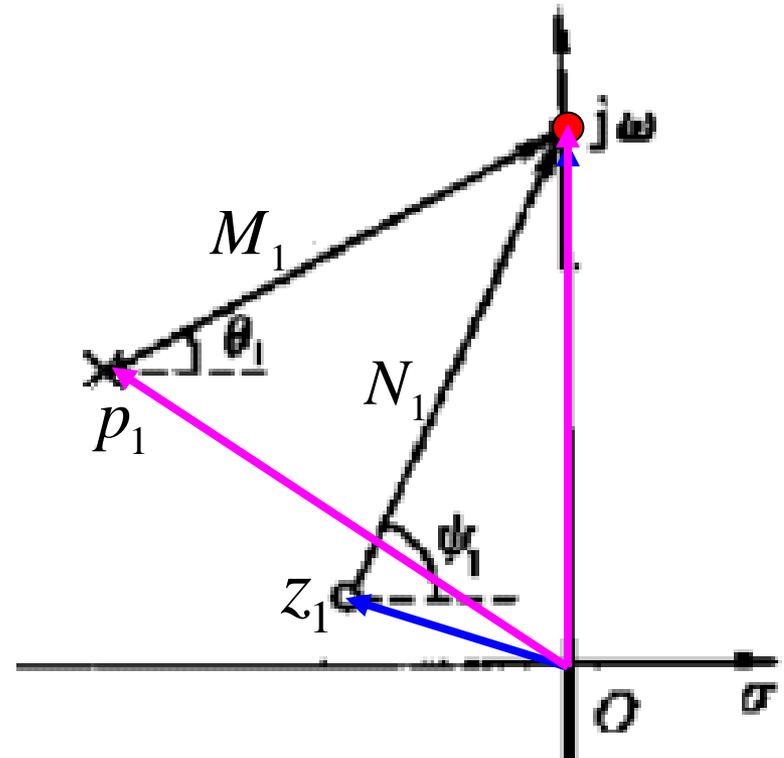


# 4.8 系统函数及其频域分析

## 频响特性曲线的几何作图法

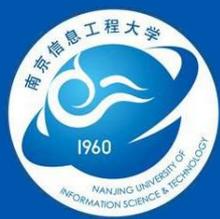
$$H(s) = k \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

$$H(j\omega) = k \frac{\prod_{j=1}^m (j\omega - z_j)}{\prod_{i=1}^n (j\omega - p_i)}$$



$$j\omega - z_1 = N_1 e^{j\psi_1}$$

$$j\omega - p_1 = M_1 e^{j\theta_1}$$



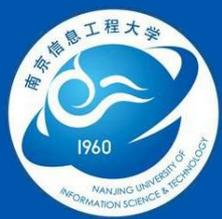
## 4.8 系统函数及其频域分析

$$H(j\omega) = k \frac{\prod_{j=1}^m (j\omega - z_j)}{\prod_{i=1}^n (j\omega - p_i)} \quad \begin{aligned} (j\omega - z_j) &= N_j e^{j\psi_j} \\ (j\omega - p_i) &= M_i e^{j\theta_i} \end{aligned}$$

$$H(j\omega) = k \frac{N_1 e^{j\psi_1} N_2 e^{j\psi_2} \cdots N_m e^{j\psi_m}}{M_1 e^{j\theta_1} M_2 e^{j\theta_2} \cdots M_n e^{j\theta_n}}$$

$$= k \frac{N_1 N_2 \cdots N_m}{M_1 M_2 \cdots M_n} e^{j[(\psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_m) - (\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)]}$$

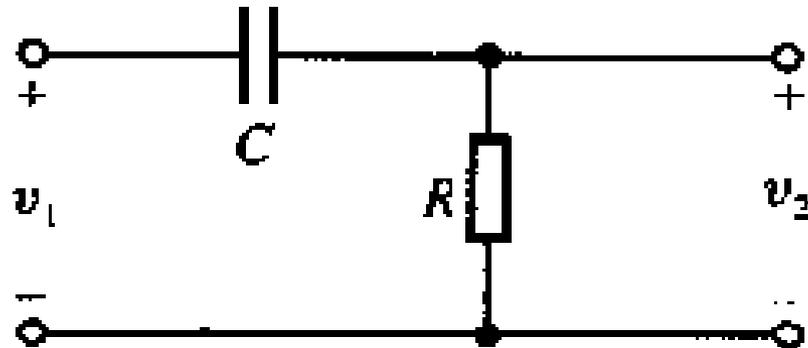
$$= |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$



## 4.8 系统函数及其频域分析

**例 研究如图所示的滤波网络的频响特性**

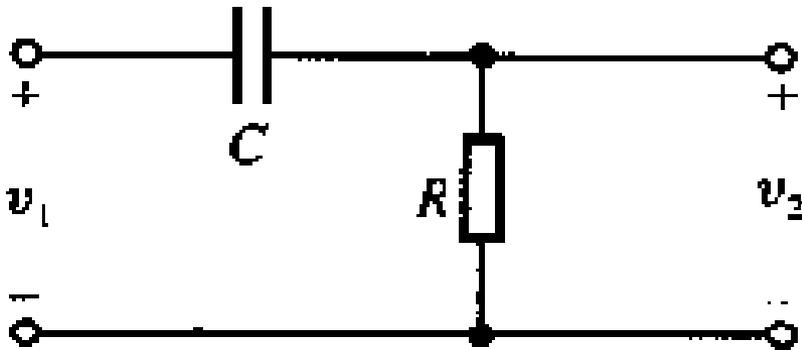
$$H(j\omega) = \frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)}$$



$$H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{s}{s + \frac{1}{RC}}$$

$$H(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + \frac{1}{RC}}$$

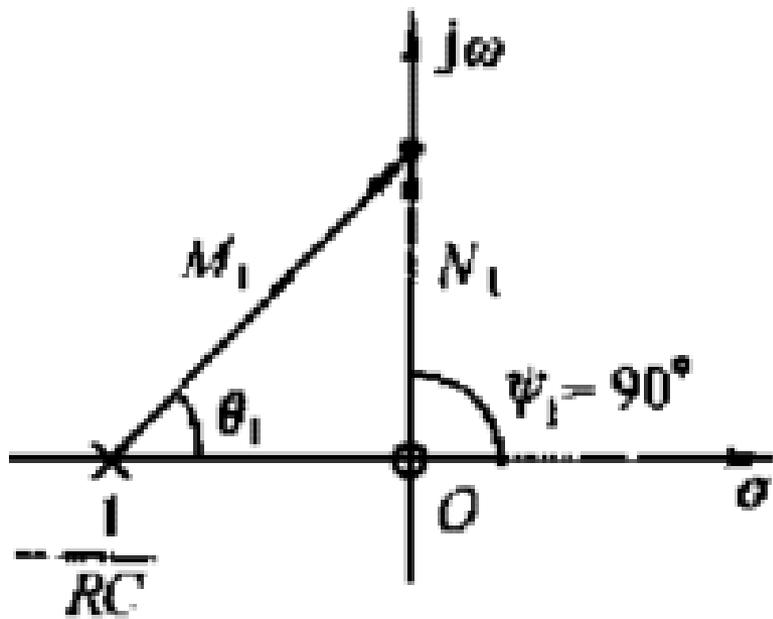
# 4.8 系统函数及其频域分析



$$H(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + \frac{1}{RC}}$$

$$z_1 = 0, \quad p_1 = -\frac{1}{RC}$$

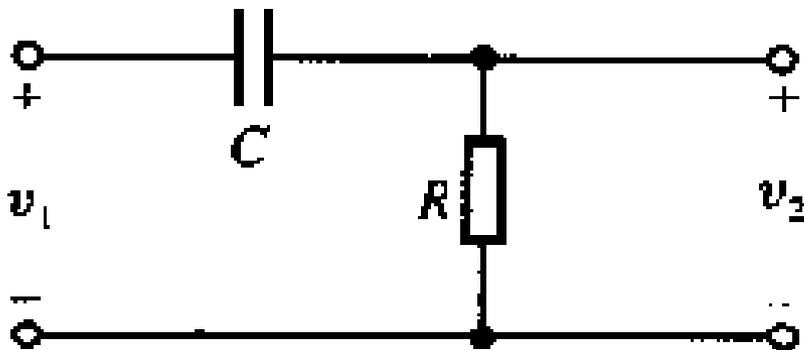
$$H(j\omega) = \frac{N_1 e^{j\psi_1}}{M_1 e^{j\theta_1}}$$



$$|H(j\omega)| = \frac{N_1}{M_1}$$

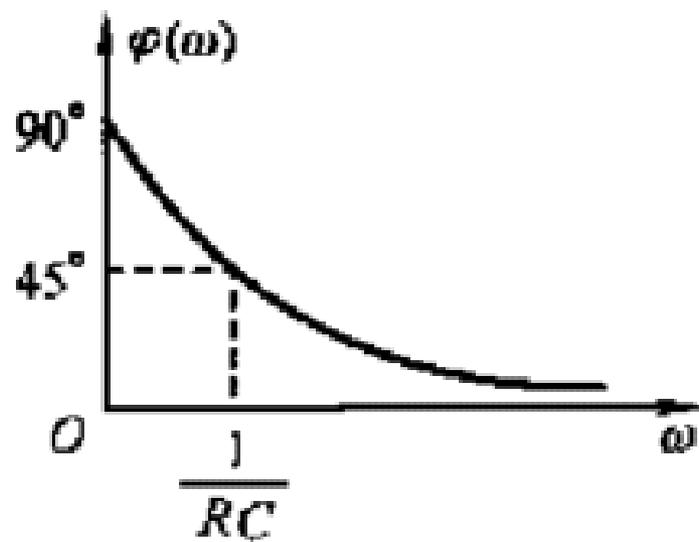
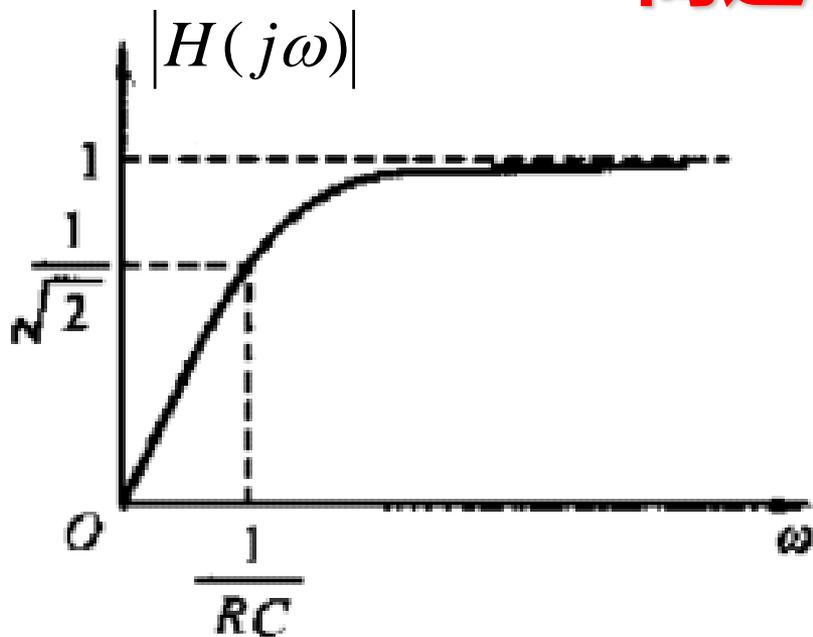
$$\varphi(\omega) = \psi_1 - \theta_1$$

# 4.8 系统函数及其频域分析



$$H(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + \frac{1}{RC}}$$

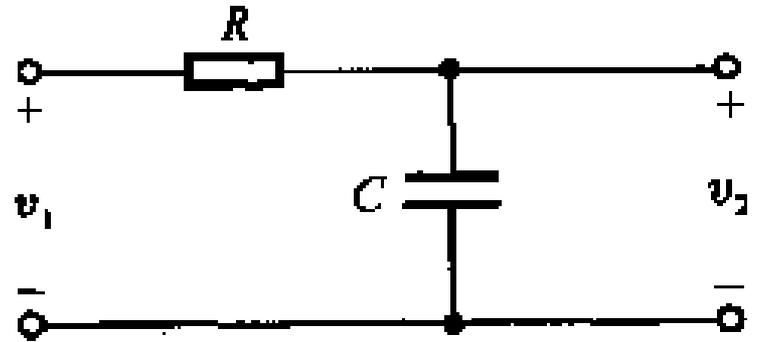
**高通**





## 4.8 系统函数及其频域分析

**例 研究如图所示的滤波网络的频响特性**



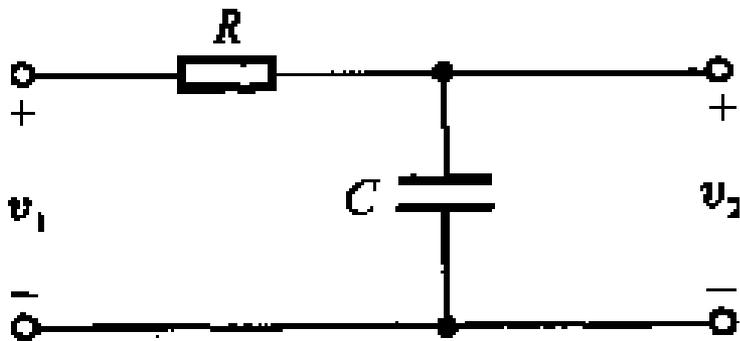
$$H(j\omega) = \frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)}$$

$$H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + \frac{1}{RC}}$$



# 4.8 系统函数及其频域分析



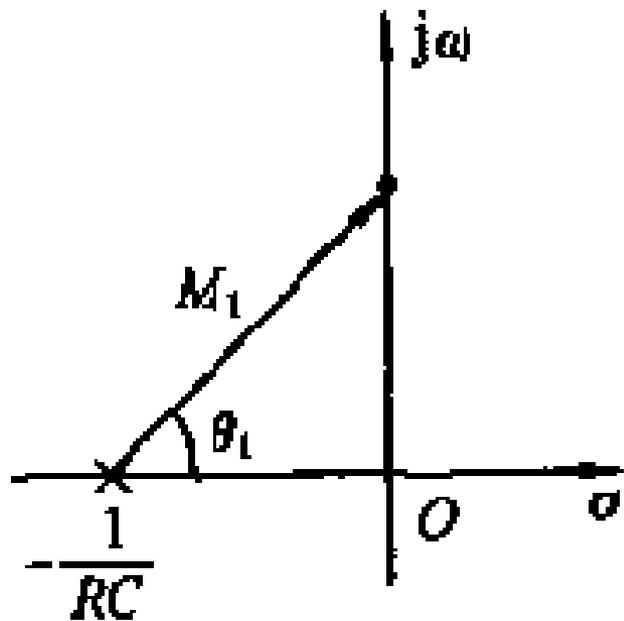
$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + \frac{1}{RC}}$$

$$p_1 = -\frac{1}{RC}$$

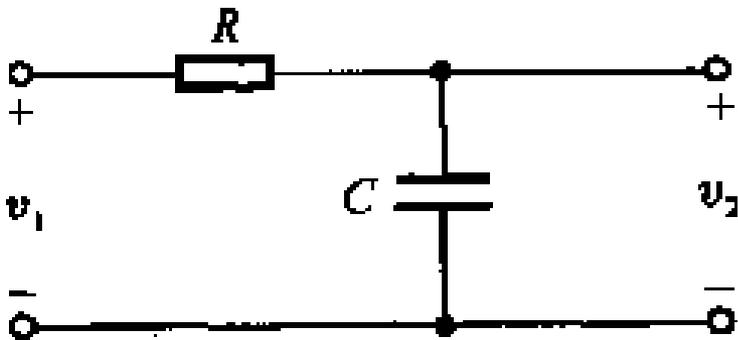
$$H(j\omega) = \frac{k}{M_1 e^{j\theta_1}} \quad k = \frac{1}{RC}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{k}{M_1} = \frac{1}{RCM_1}$$

$$\varphi(\omega) = -\theta_1$$

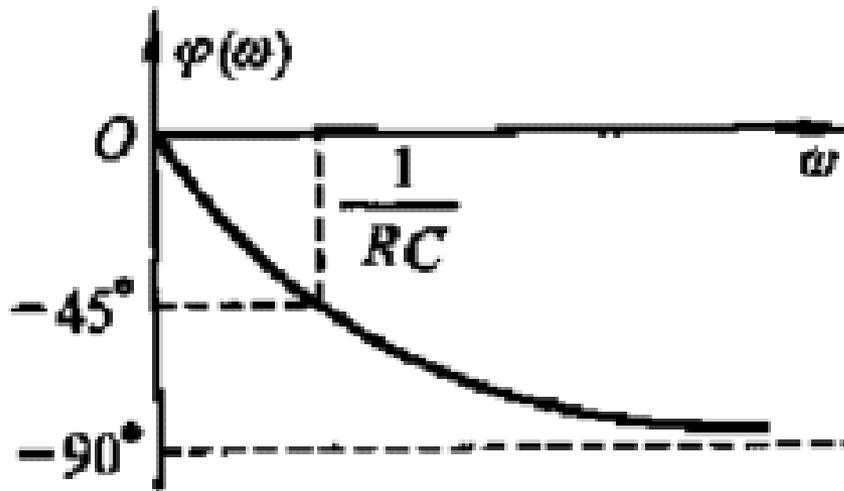
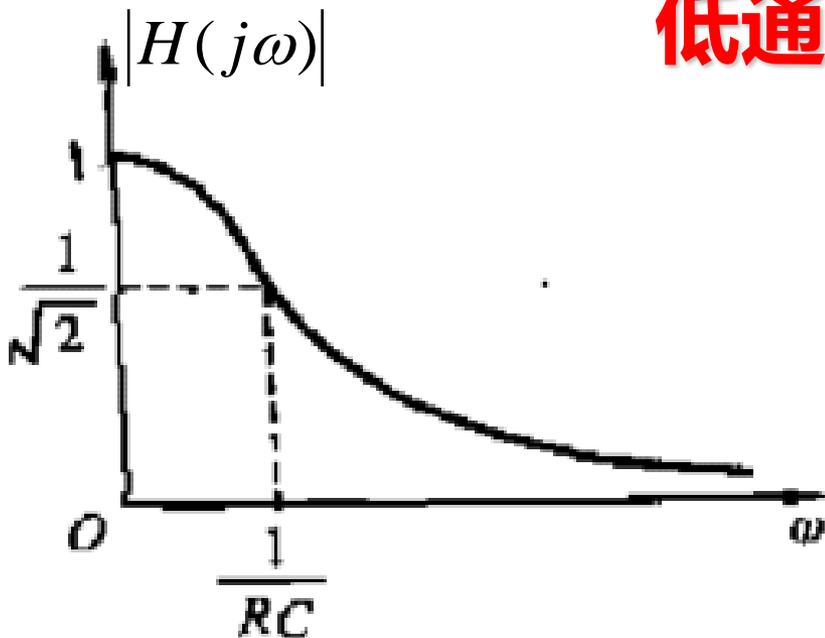


# 4.8 系统函数及其频域分析



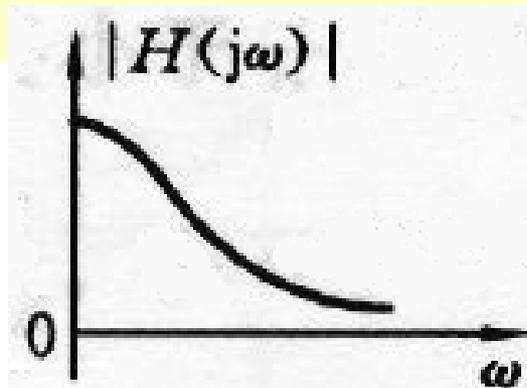
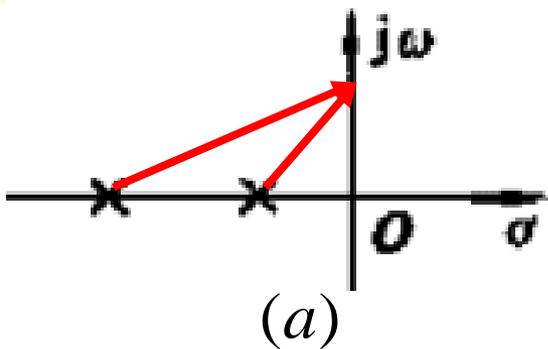
$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega RC + 1}$$

**低通**

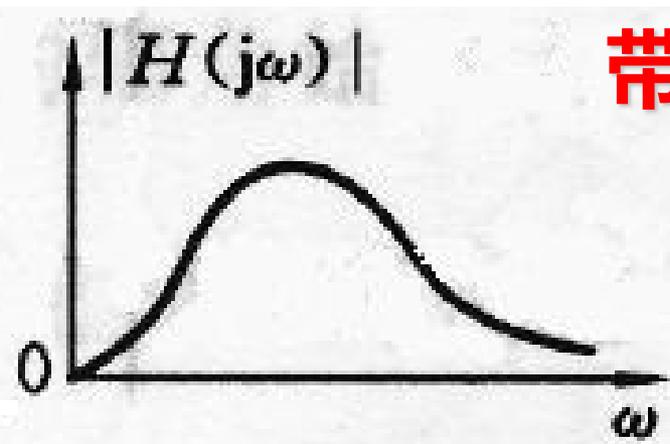
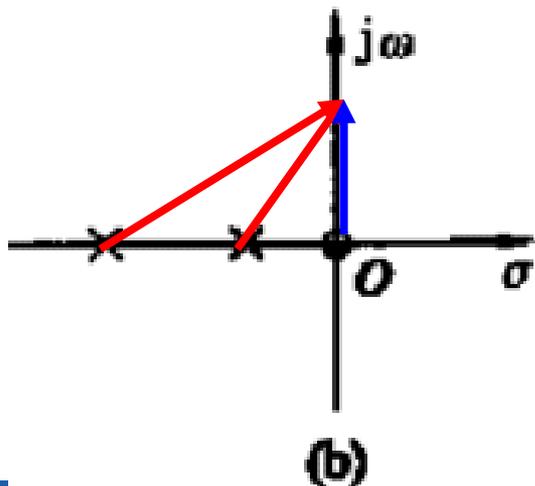


## 4.8 系统函数及其频域分析

若 $H(s)$ 零极点分布如图, 试讨论它们分别是哪种滤波网络  
(低通, 高通, 带通, 带阻).

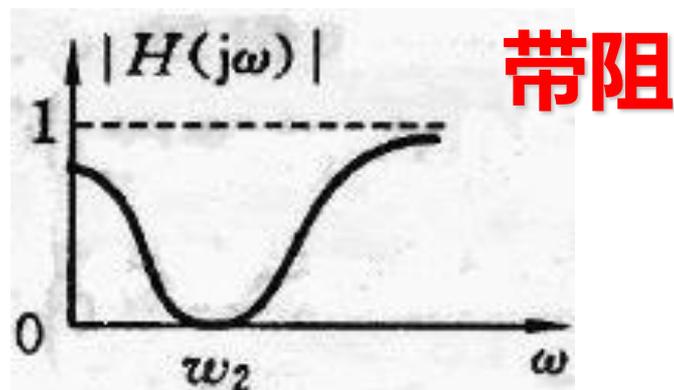
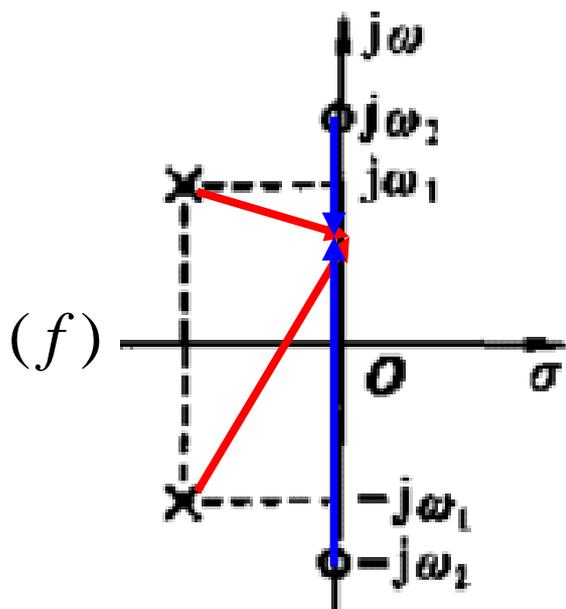
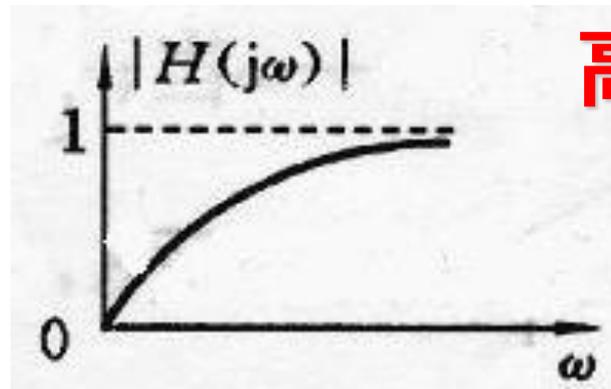
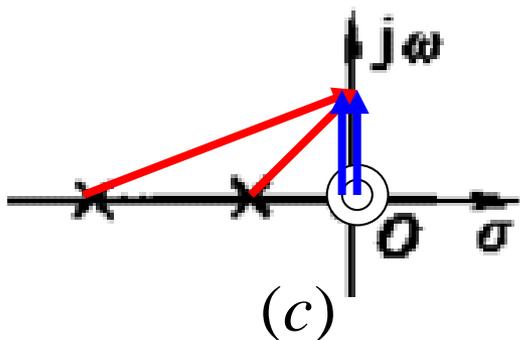


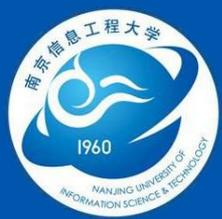
**低通**



**带通**

# 4.8 系统函数及其频域分析





## 4.8 系统函数及其频域分析

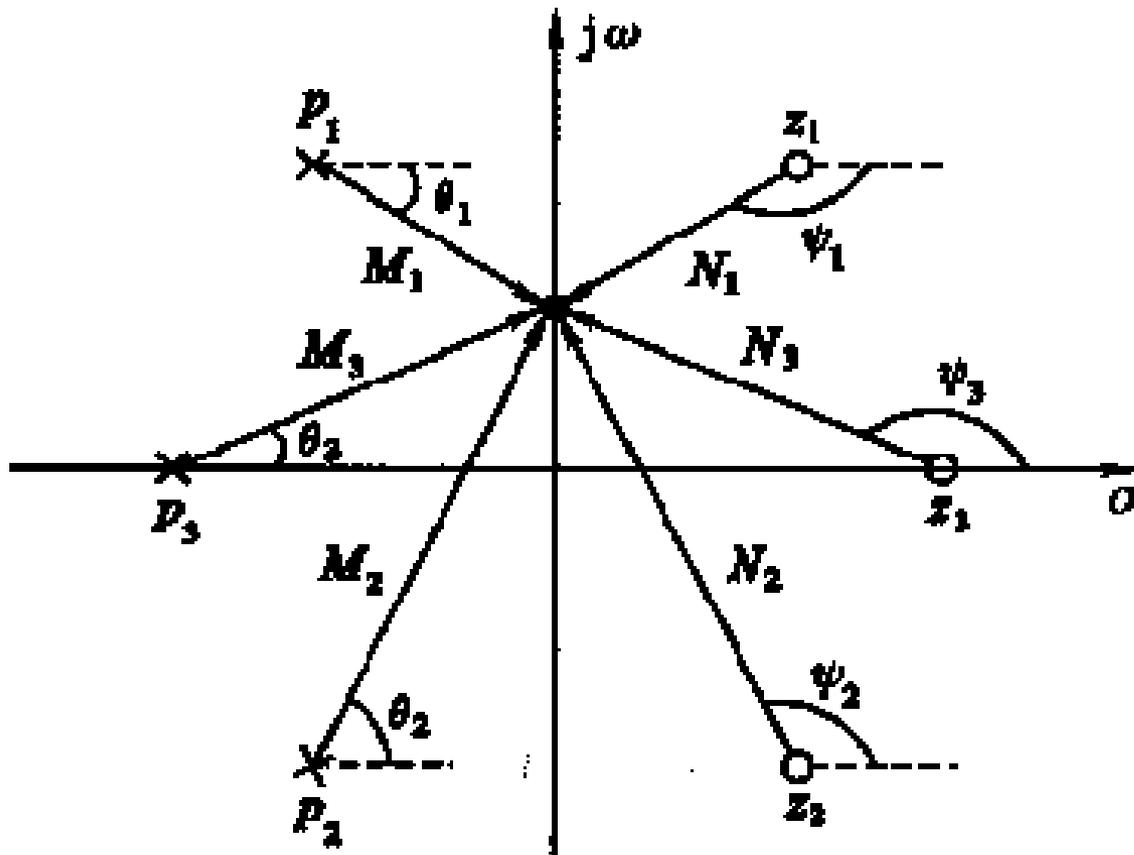
### 全通函数与最小相移函数的零、极点分布

如果一个系统函数的极点全都位于左半 $s$ 平面，零点全都位于右半 $s$ 平面，而且零点与极点对于 $j\omega$ 轴互为镜像，那么这种系统函数称为**全通函数**，此系统称为**全通系统**或**全通网络**。

**全通**是指它的幅频特性为常数，对于全部频率的正弦信号都能按同样的幅度传输系数通过。



# 4.8 系统函数及其频域分析



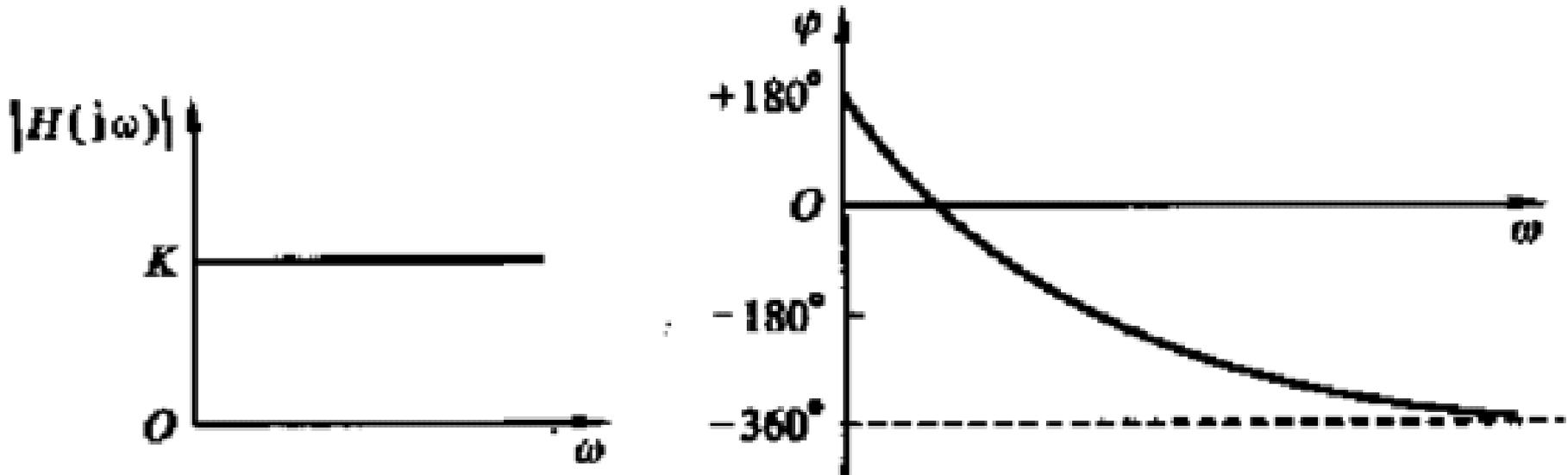
$$H(j\omega) = k \frac{N_1 N_2 N_3}{M_1 M_2 M_3} e^{j[(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3) - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)]}$$

$$|H(j\omega)| = k$$



## 4.8 系统函数及其频域分析

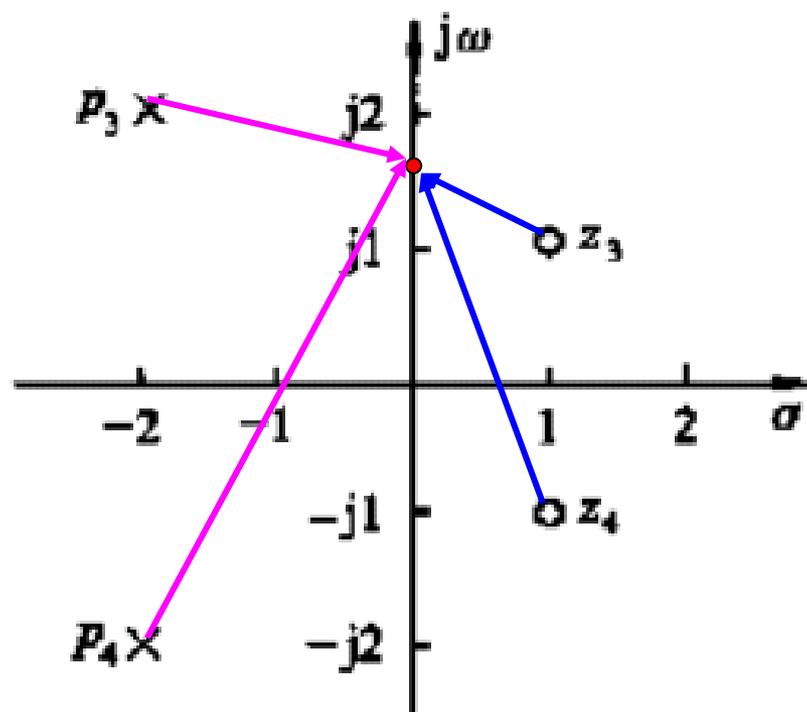
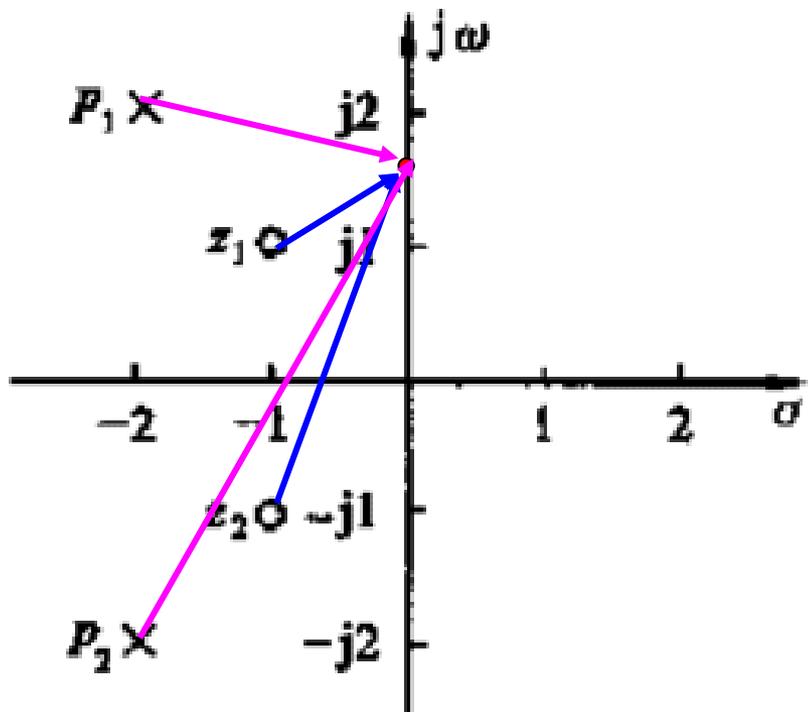
### 全通网络的幅频特性曲线与相频特性曲线



全通网络可以保证不影响待传信号的幅频特性，只改变信号的相频特性。在传输系统中常用来进行相位校正。

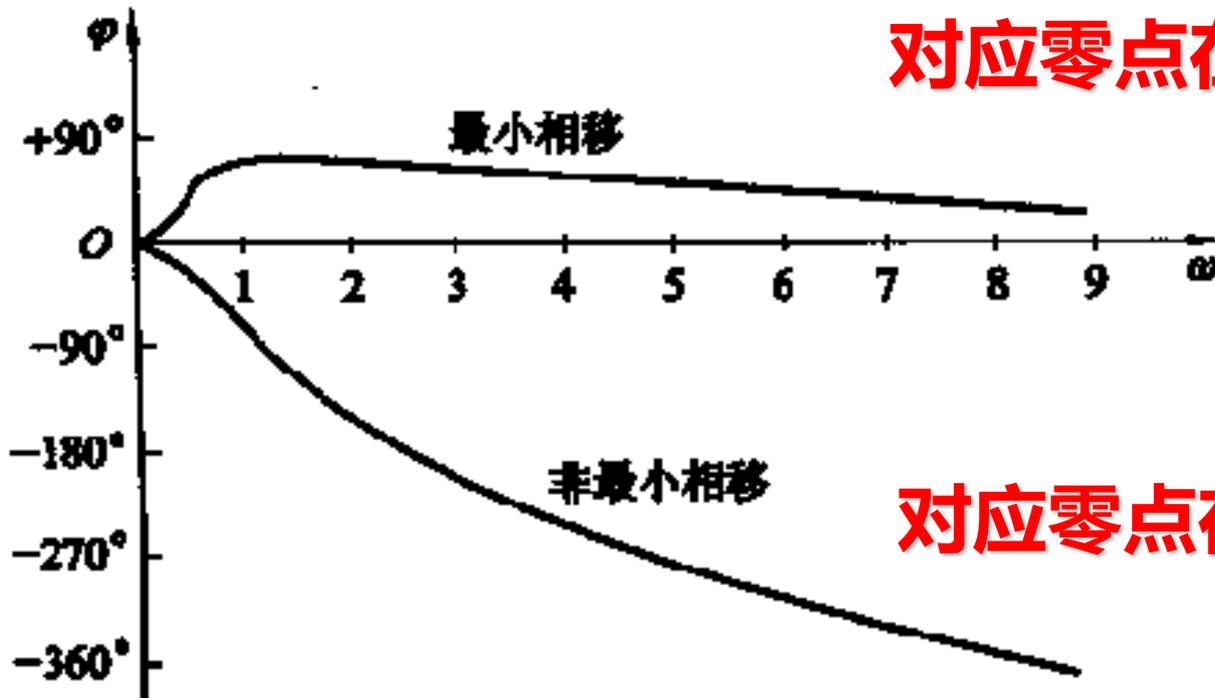


# 4.8 系统函数及其频域分析



**极点相同，零点以 $j\omega$ 轴成镜像，则它们的幅频特性相同**

## 4.8 系统函数及其频域分析



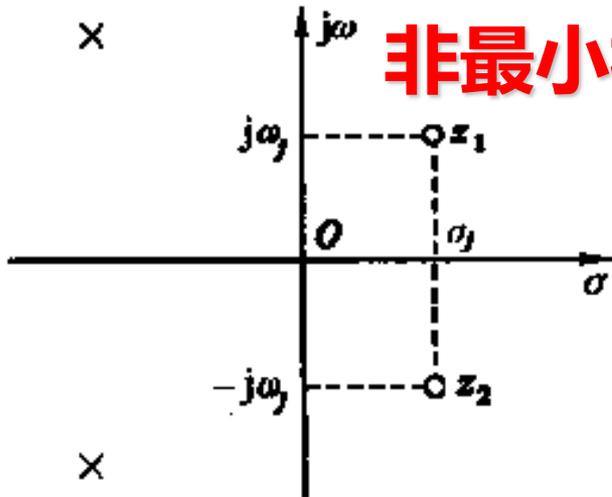
对应零点在左半面的图

对应零点在右半面的图

**“最小相移网络”**：零点仅位于左半平面或虚轴上的网络函数称为“最小相移网络”。

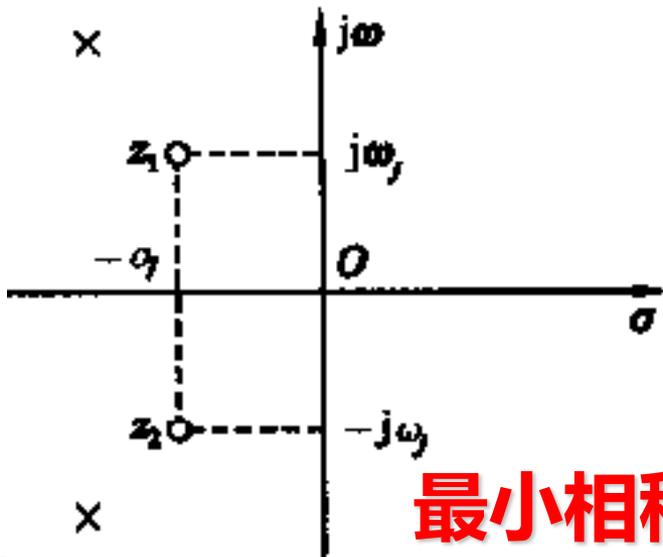
**前提条件**：极点都位于左半平面即为稳定系统。

# 4.8 系统函数及其频域分析



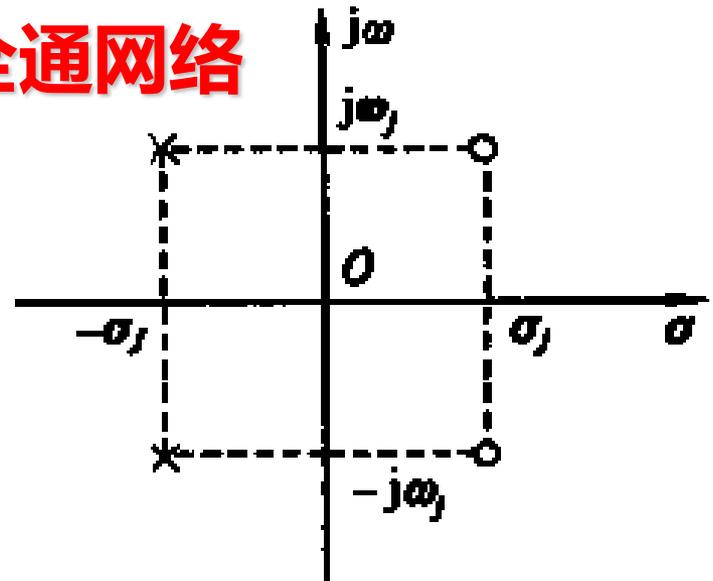
**非最小相移网络**

**非最小相移网络  
可以看成最小相  
移网络和全通网  
络的级联**



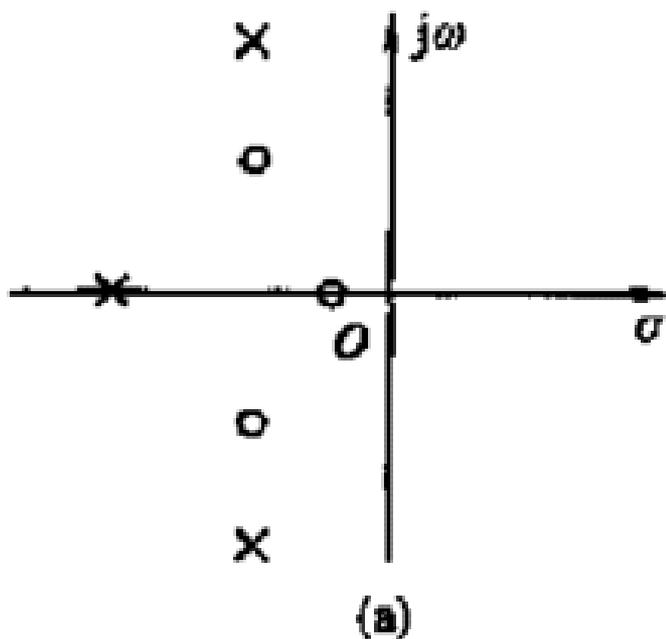
**最小相移网络**

**全通网络**



## 4.8 系统函数及其频域分析

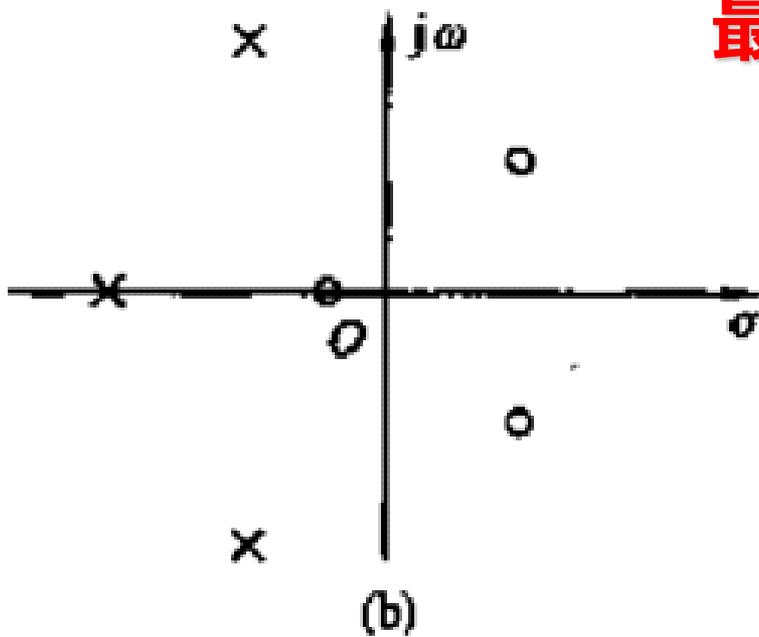
例 图中所示为 $s$ 平面零极点分布图,分别指出它们是否最小相移网络.如果不是,应由零极点分布的最小相移网络和全通网络来组合.



**是最小相移网络**

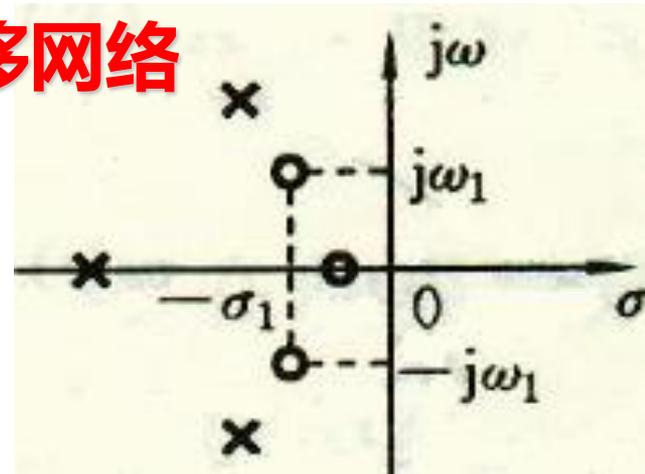
# 4.8 系统函数及其频域分析

例 图中所示为 $s$ 平面零极点分布图,分别指出它们是否最小相移网络.如果不是,应由零极点分布的最小相移网络和全通网络来组合.

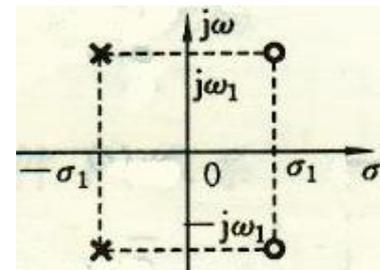


**不是最小相移网络**

**最小相移网络**



**全通网络**





## 4.9 线性系统的稳定性

### ■ 系统稳定性的定义

- **系统稳定**：任何有界的输入将引起有界的输出，简称BIBO稳定（Bounded Input Bounded Output）

系统稳定性是**系统本身的特性**，与输入信号无关。

连续时间LTI系统稳定性的问题和**系统因果性**是密切相关的，这里**只考虑因果系统的稳定性**。

系统的冲激响应 $h(t)$ 和系统函数 $H(s)$ 也表征了系统的稳定性。

连续时间LTI系统为因果系统的充要条件为  $h(t) = 0, t < 0$

连续时间、因果LTI系统稳定的充要条件是冲激响应绝对可积，

即

$$\int_0^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$



## 4.9 线性系统的稳定性

### ■ 系统稳定性的判断

由系统函数判断连续时间、因果LTI系统系统稳定性

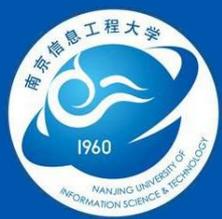
$$\begin{cases} H(s) \text{ 为假分式时, 不稳定。} \\ H(s) \text{ 为真分式, 有可能稳定。} \end{cases}$$

由系统函数的极点分布可以判断连续时间、因果LTI系统系统稳定性

(1) 当  $H(s)$  的所有极点全部位于平面的左半平面, 不在虚轴上, 则系统是稳定的。  $\lim_{t \rightarrow \infty} [h(t)] = 0$

(2) 当  $H(s)$  在平面虚轴上有一阶极点, 其余所有极点全部位于平面的左半平面,  $h(t)$  等幅振荡或趋于一个非零的数值, 则系统是临界稳定的。

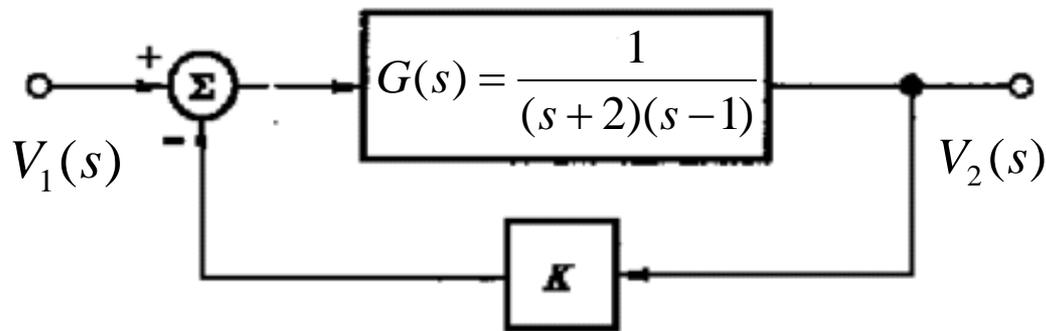
(3) 当  $H(s)$  含有右半平面的极点或虚轴上有二阶或二阶以上的极点时,  $h(t)$  增长, 不收敛, 系统是不稳定的。



# 4.9 线性系统的稳定性

## ■ 系统稳定性的判断

**例：**图示为一线性反馈系统，讨论当 $K$ 从0增长时系统稳定性的变化。



**解：**

$$V_2(s) = [V_1(s) - KV_2(s)]G(s)$$

$$V_2(s)[1 + kG(s)] = V_1(s)G(s)$$

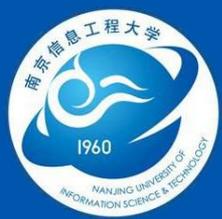
$$H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{G(s)}{1 + KG(s)} = \frac{1}{s^2 + s + K - 2}$$

$$p_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(K - 2)}}{2}$$

$K > 2$ , 系统稳定

$K < 2$ , 系统不稳定

$K = 2$ , 系统临界稳定



## 4.9 线性系统的稳定性

### ■ 系统稳定性的判断

三阶以下系统稳定的判定的充要条件：

假设系统函数分母多项式的最高项系数为1

$$A(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0$$

(1) 一阶系统  $A(s) = s + a_0$ ，显然只要参数满足  $a_0 > 0$

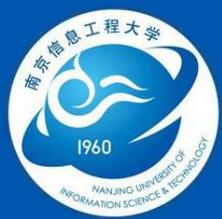
即为稳定。 $a_0 = 0$  为临界稳定。

(2) 二阶系统  $A(s) = s^2 + a_1s + a_0$  只要参数满足  $a_1 > 0, a_0 > 0$

即为稳定。 $a_1 = 0$  或  $a_0 = 0$  属于为临界稳定。

(3) 三阶系统  $A(s) = s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$  必须满足条件

$a_2 > 0, a_1 > 0, a_0 > 0$  且  $a_1a_2 > a_0$  系统才是稳定的



# 4.9 线性系统的稳定性

## ■ 系统稳定性的判断

**例：**如图反馈因果系统，问当K满足什么条件时，系统是稳定的？其中子系统的系统函数 $G(s)=1/[(s+1)(s+2)]$ 。

**解：**

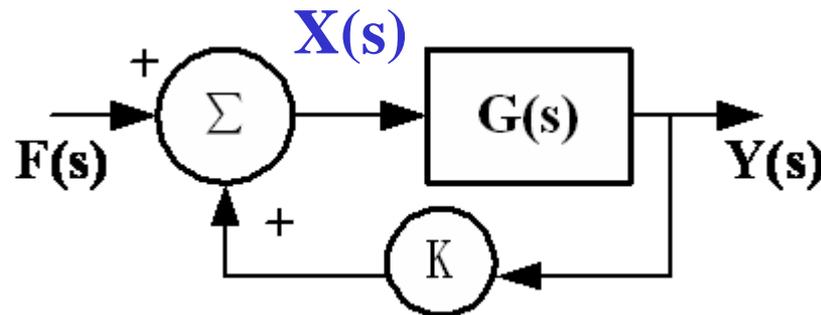
$$X(s)=KY(s)+F(s)$$

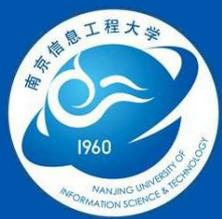
$$Y(s)=G(s)X(s)=KG(s)Y(s)+G(s)F(s)$$

$$H(s)=Y(s)/F(s)=G(s)/[1-KG(s)]=1/(s^2+3s+2-K)$$

$$H(s)\text{的极点为 } p_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1+4K}}{2}$$

$$2-K > 0 \Rightarrow K < 2$$

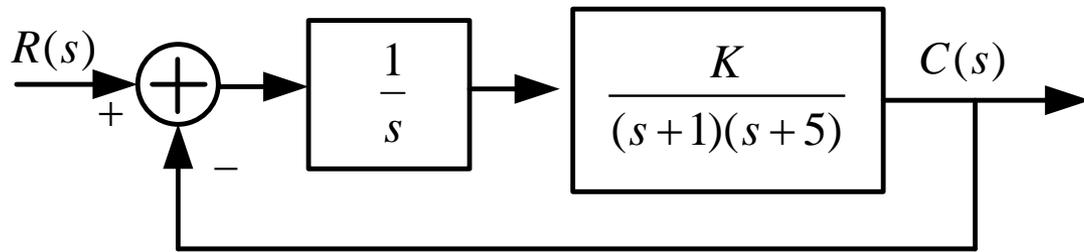




# 4.9 线性系统的稳定性

## ■ 系统稳定性的判断

**例：** 设系统方框图如图所示，求：（1）系统函数 $H(s)$ ；（2）系统稳定，参数 $K$ 满足的条件。



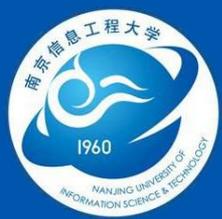
**解：**

系统函数为

$$H(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K}{s(s+1)(s+5)}}{1 + \frac{K}{s(s+1)(s+5)}} = \frac{K}{s(s+1)(s+5) + K} = \frac{K}{s^3 + 6s^2 + 5s + K}$$

由系统函数可知，系统属于3阶，所以系统稳定要满足的条件为

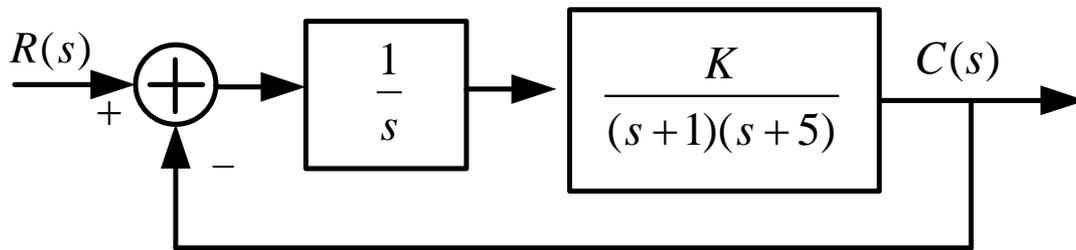
$$\begin{cases} K > 0 \\ 5 \cdot 6 - K > 0 \end{cases} \quad \therefore 0 < K < 30$$



# 4.9 线性系统的稳定性

## ■ 系统稳定性的判断

**例：** 设系统方框图如图所示，求：（1）系统函数 $H(s)$ ；（2）系统稳定，参数 $K$ 满足的条件。



**解：**

系统函数为

$$H(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K}{s(s+1)(s+5)}}{1 + \frac{K}{s(s+1)(s+5)}} = \frac{K}{s(s+1)(s+5) + K} = \frac{K}{s^3 + 6s^2 + 5s + K}$$

由系统函数可知，系统属于3阶，所以系统稳定要满足的条件为

$$\begin{cases} K > 0 \\ 5 \cdot 6 - K > 0 \end{cases} \quad \therefore 0 < K < 30$$



## 4.9 线性系统的稳定性

### ■ 系统稳定性的判断

线性定常系统的劳斯稳定判据：

假设系统函数的特征方程：

$$A(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n$$

- (1) 劳斯判据给出的系统稳定的**必要条件**：特征方程的所有系数均为正值，且特征方程式不缺项。
- (2) 劳斯判据给出的系统稳定的**充分条件**：劳斯表中第一列所有项均为正号。



# 4.9 线性系统的稳定性

## ■ 系统稳定性的判断

### 线性定常系统的劳斯稳定判据

$$A(s) = a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n$$

如果特征方程所有系数均为正值，则按如下方式构建劳斯表：

$$s^n \quad a_0 \quad a_2 \quad a_4 \quad a_6 \quad \dots$$

$$s^{n-1} \quad a_1 \quad a_3 \quad a_5 \quad a_7 \quad \dots$$

$$s^{n-2} \quad b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4 \quad \dots$$

$$s^{n-3} \quad c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4 \quad \dots$$

$$\vdots$$

$$s^2 \quad d_1 \quad d_2 \quad d_3$$

$$s^1 \quad e_1 \quad e_2$$

$$s^0 \quad f_1$$

$$b_1 = \frac{-1}{a_1} \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1}$$

$$b_2 = \frac{-1}{a_1} \begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix} = \frac{a_1a_4 - a_0a_5}{a_1}$$

$$b_3 = \frac{-1}{a_1} \begin{vmatrix} a_0 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{vmatrix} = \frac{a_1a_6 - a_0a_7}{a_1}$$

$$c_1 = \frac{-1}{b_1} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \frac{b_1a_3 - a_1b_2}{b_1}$$

每一行系数的计算，一直进行到后面的全部为0位置；  
这个过程一直进行到n+1行为止。



# 4.9 线性系统的稳定性

## ■ 系统稳定性的判断

### 线性定常系统的劳斯稳定判据

$s^n$	$a_0$	$a_2$	$a_4$	$a_6$	$\dots$
$s^{n-1}$	$a_1$	$a_3$	$a_5$	$a_7$	$\dots$
$s^{n-2}$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$\dots$
$s^{n-3}$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$\dots$
$\vdots$					
$s^2$	$d_1$	$d_2$	$d_3$		
$s^1$	$e_1$	$e_2$			
$s^0$	$f_1$				

$$A(s) = a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n$$

### 说明:

(1) 在劳斯表中，为了简化计算，用一个正整数去乘某一项的各项，不影响稳定性结论；

(2) 如果必要条件不满足，则可断定系统不稳定或临界稳定；

(3) 如果必要条件满足，则需列劳斯表，检查表中第一列的数值是否均为正值。如果是，则稳定；否则，不稳定，且系统在右半平面极点个数，等于劳斯表第一列系数**符号改变的次数**。



# 4.9 线性系统的稳定性

## ■ 系统稳定性的判断

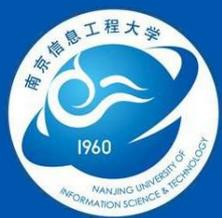
### 线性定常系统的劳斯稳定判据

**例：** 设系统特征方程为  $s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5 = 0$ ，试判别系统的稳定性。

**解：** 特征方程所有系数均为正且无缺项，满足必要条件，列出劳斯表

$s^4$	1	3	5
$s^3$	2	4	
$s^2$	1	5	
$s^1$	-6		
$s^0$	5		

由于劳斯表中第一列出现了负数，可以判定在右半平面有特征根，因此该系统不稳定。

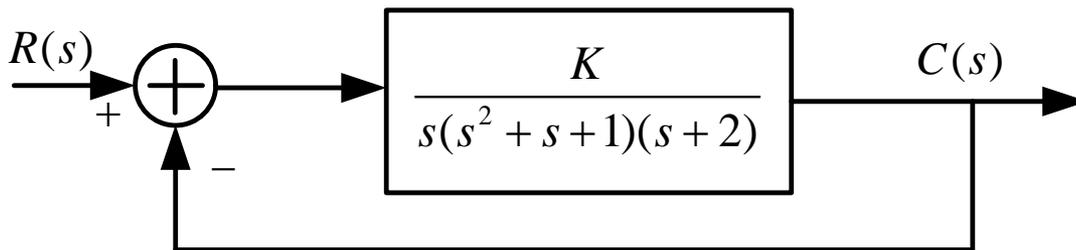


# 4.9 线性系统的稳定性

## ■ 系统稳定性的判断

### 线性定常系统的劳斯稳定判据

例：设系统方框图如图所示，确定使系统稳定的  $K$  的取值范围。



解：

$$\text{系统函数为 } H(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(s^2 + s + 1)(s + 2) + K}$$

$$\text{系统的特征方程为 } D(s) = s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

由稳定的必要条件可知， $K > 0$ ，列劳斯表如下：

$s^4$	1	3	$K$
$s^3$	3	2	0
$s^2$	$\frac{7}{3}$	$K$	
$s^1$	$2 - \frac{9K}{7}$		
$s^0$	$K$		

$$\therefore \begin{cases} K > 0 \\ 2 - \frac{9K}{7} > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < K < \frac{14}{9}$$



## 4.9 线性系统的稳定性

### ■ 系统稳定性的判断

劳斯表的两种特殊情况：

- (1) 在劳斯表的某一行中，第一个元素为零，而其余元素不全为零；
- (2) 劳斯表中的某一行所有元素均为零。

**这两种情况表明：**系统在复平面内存在正根、或两个大小相等符号相反的实根、或两个共轭虚根，系统处于**不稳定状态**或**临界稳定状态**。

**第(1)种情况处理方法：**用一个很小的正数  $\varepsilon$  代替为零的元素，然后继续计算，完成劳斯表。  $D(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 6s + 1 = 0$

$$\begin{array}{l} s^4 \quad 1 \quad 3 \quad 1 \\ s^3 \quad 2 \quad 6 \quad 0 \\ s^2 \quad 0(\varepsilon) \quad 1 \\ s^1 \quad \frac{6\varepsilon-2}{\varepsilon} \rightarrow -\infty \\ s^0 \quad 1 \end{array}$$

因为第一列元素的符号改变了两次，所以系统不稳定，且有两个正实部的特征根。



# 4.9 线性系统的稳定性

## ■ 系统稳定性的判断

### 劳斯表的两种特殊情况及处理

**第(2)种情况处理方法：**用全零行的上一行元素构成一个辅助方程（它的次数总是偶数，表示特征根中出现关于原点对称的根的数目），再将辅助方程对  $s$  求导，用求导之后的方程系数代替全零行的元素，继续完成劳斯表。

$$D(s) = s^3 + 2s^2 + s + 2 = 0$$

$s^3$	1	1	
$s^2$	2	2	→ 辅助方程 $2s^2 + 2 = 0$
$s^1$	0	0	
	4	0	← 辅助方程求导之后的系数
$s^0$	2		

劳斯表第一列元素符号均大于零，该系统**不含有正实部**的根，而含有一对**纯虚根**，可由辅助方程求出。

$$2s^2 + 2 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \pm j$$

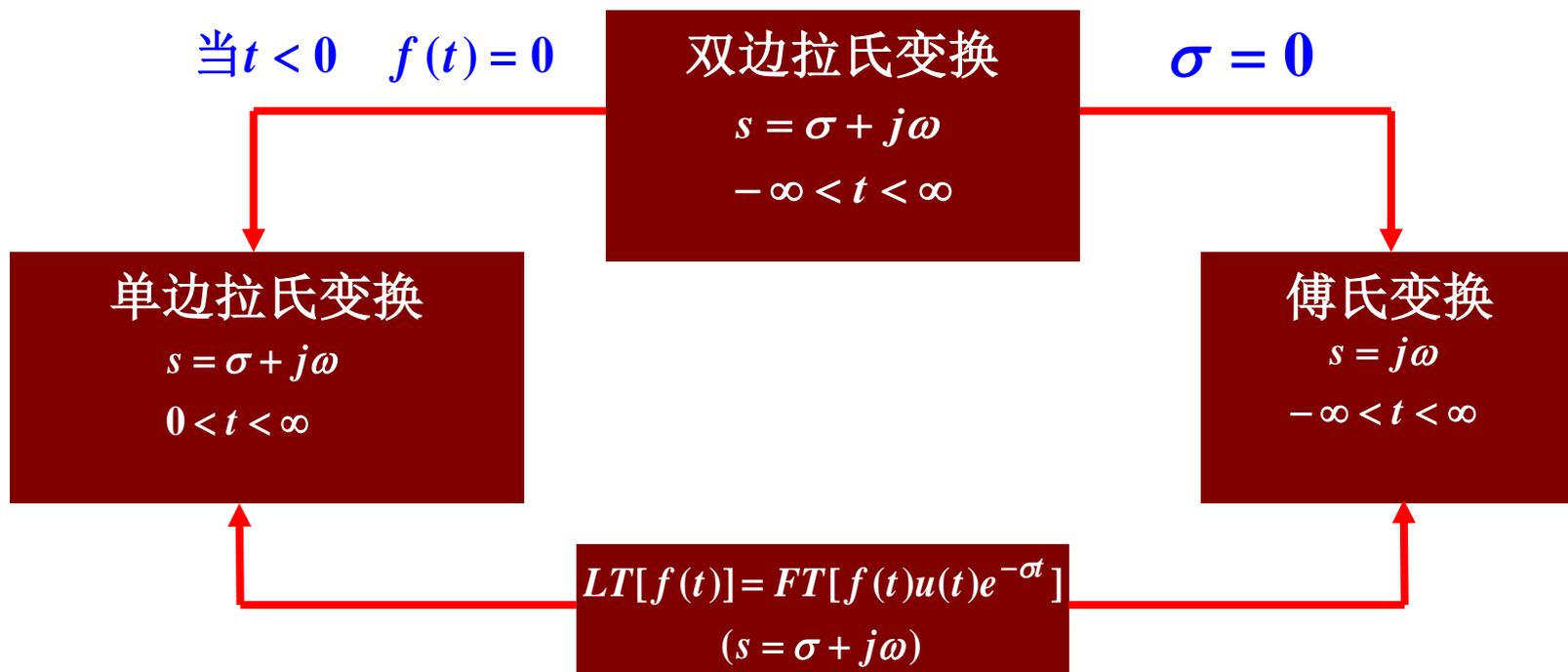


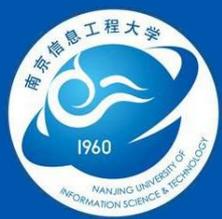
# 4.10 由拉普拉斯变换引出傅里叶变换

## ■ 傅里叶变换与拉普拉斯变换的关系

当  $f(t)$  不满足绝对可积条件，对其乘以一个衰减因子  $e^{-\sigma t}$ ，再作傅里叶变换，演变成了拉普拉斯变换

$$\mathcal{F}[f(t) \cdot e^{-\sigma t}] = F(s) \Big|_{s=\sigma+j\omega} = \mathcal{L}[f(t)]$$





# 4.10 由拉普拉斯变换引出傅里叶变换

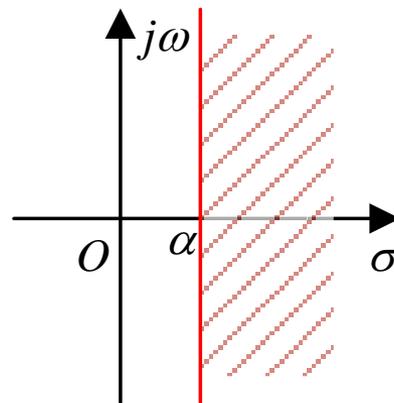
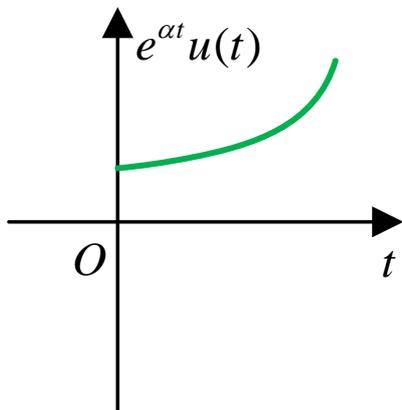
## ■ 由单边拉氏变换求傅里叶变换

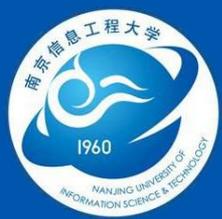
**前提条件:** 函数  $f(t)$  为有始信号, 即当  $t < 0$  时,  $f(t) = 0$ 。

1.  $F(s)$  有极点在右半  $s$  平面, 傅里叶变换不存在, 不可从  $F(s)$  推出  $F(\omega)$ 。

$$f(t) = e^{\alpha t} u(t) \quad (\alpha > 0) \quad \text{拉氏变换} : F(s) = \frac{1}{s - \alpha}$$

收敛域:  $\sigma > \alpha$





# 4.10 由拉普拉斯变换引出傅里叶变换

## ■ 由单边拉氏变换求傅里叶变换

**前提条件:** 函数  $f(t)$  为有始信号, 即当  $t < 0$  时,  $f(t) = 0$ 。

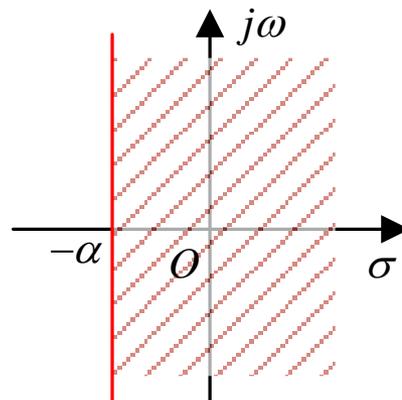
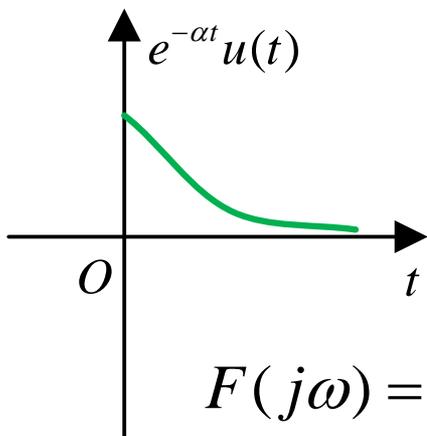
2.  $F(s)$  的极点全在左半  $s$  平面, 其傅氏变换存在,

$$F(j\omega) = F(s) \Big|_{s=j\omega}$$

$$f(t) = e^{-\alpha t} u(t) \quad (\alpha > 0)$$

$$\text{拉氏变换} : F(s) = \frac{1}{s + \alpha}$$

收敛域:  $\sigma > -\alpha$



$$F(j\omega) = F(s) \Big|_{s=j\omega}$$



## 4.10 由拉普拉斯变换引出傅里叶变换

### ■ 由单边拉氏变换求傅里叶变换

**前提条件：**函数  $f(t)$  为有始信号，即当  $t < 0$  时， $f(t) = 0$ 。

3.  $F(s)$  有极点在虚轴上，分为两种情况

(1)  $F(s)$  在  $j\omega$  轴上有  $N$  个单极点，其余极点均位于  $s$  左半面.

$$F(j\omega) = F(s) \Big|_{s=j\omega} + \pi \sum_{i=1}^N k_i \delta(\omega - \omega_i) \quad u(t)$$

$$F(s) = F_a(s) + \sum_{i=1}^N \frac{k_i}{s - j\omega_i} \quad f(t) = f_a(t) + \sum_{i=1}^N k_i e^{j\omega_i t} u(t)$$

$$F(j\omega) = F_a(s) \Big|_{s=j\omega} + \sum_{i=1}^N k_i \left[ \pi \delta(\omega - \omega_i) + \frac{1}{j(\omega - \omega_i)} \right]$$

$$= F_a(s) \Big|_{s=j\omega} + \sum_{i=1}^N \frac{k_i}{j\omega - j\omega_i} + \sum_{i=1}^N k_i \pi \delta(\omega - \omega_i) = F(s) \Big|_{s=j\omega} + \pi \sum_{i=1}^N k_i \delta(\omega - \omega_i)$$



## 4.10 由拉普拉斯变换引出傅里叶变换

### ■ 由单边拉氏变换求傅里叶变换

(2)  $F(s)$ 在 $j\omega$ 轴上具有 $m$ 重极点

$$F(j\omega) = F(s)\Big|_{s=j\omega} + \frac{j^{m-1}k_0\pi}{(m-1)!} \delta^{m-1}(\omega - \omega_0) \quad tu(t)$$

$$F(s) = F_a(s) + \frac{k_0}{(s - j\omega_0)^m} \xrightarrow{\text{拉氏逆变换}} f(t) = f_a(t) + \frac{k_0 t^{m-1}}{(m-1)!} e^{j\omega_0 t} u(t)$$

$$\xrightarrow{\text{傅里叶变换}} F(j\omega) = F_a(s)\Big|_{s=j\omega} + \frac{k_0 j^{m-1}}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{d\omega^{m-1}} \left[ \pi\delta(\omega - \omega_0) + \frac{1}{j(\omega - \omega_0)} \right]$$

$$= F_a(s)\Big|_{s=j\omega} + \frac{k_0 j^{m-1}}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{d\omega^{m-1}} \frac{1}{j\omega - j\omega_0} + \frac{k_0 j^{m-1}}{(m-1)!} \pi\delta^{(m-1)}(\omega - \omega_0)$$

$$= F_a(s)\Big|_{s=j\omega} + \frac{k_0 j^{m-1}}{(m-1)!} (-j)^{m-1} (m-1)! \frac{1}{(j\omega - j\omega_0)^m} + \frac{k_0 j^{m-1}}{(m-1)!} \pi\delta^{(m-1)}(\omega - \omega_0)$$

$$= F_a(s)\Big|_{s=j\omega} + \frac{k_0}{(j\omega - j\omega_0)^m} + \frac{k_0 \pi j^{m-1}}{(m-1)!} \delta^{(m-1)}(\omega - \omega_0)$$



## 4.10 由拉普拉斯变换引出傅里叶变换

### ■ 由单边拉氏变换求傅里叶变换

**例：**已知  $f(t) = e^{-2t} \cos t \cdot u(t)$  的单边拉氏变换为  $F(s) = \frac{s+2}{(s+2)^2+1}$ ，求其傅里叶变换。

**解：**

$F(s)$  的极点  $p_{1,2} = -2 \pm j$  在  $s$  平面的左半平面，因此

$$F(j\omega) = F(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{j\omega + 2}{(j\omega + 2)^2 + 1}$$