《信号与系统》

第3章 傅里叶变换

吉小鹏

E-mail: 003163@nuist.edu.cn

南京信息工程大学 电子与信息工程学院 尚贤楼207




本章讨论连续时间信号与系统的傅里叶分析方法，从正交函数出发，得出三角函数和复指数形式的傅里叶级数，引出傅里叶变换并建立信号频谱概念。

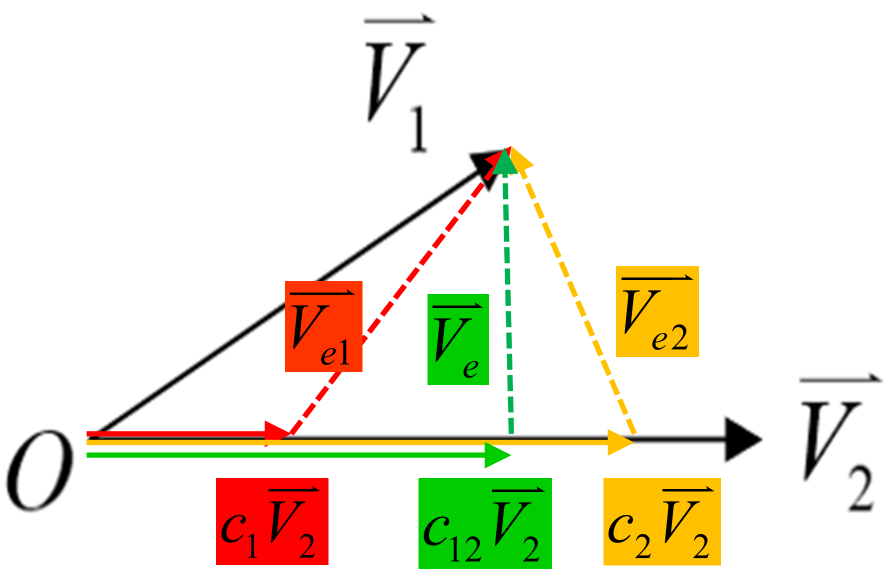
通过研究典型信号频谱以及傅里叶变换的性质，初步掌握连续信号的频域分析方法，在此基础上延伸至周期信号与抽样信号的傅里叶变换。最后介绍傅里叶变换的典型应用。

提纲

正交分解与正交函数集

- 矢量的正交分解

有两个向量 $\vec{V}_1$ 和 $\vec{V}_2$，试用 $\vec{V}_2$ 来表示 $\vec{V}_1$



$\vec{V}_1$ ： ?$\vec{V}_2$

$$\vec{V}_1 = c_1\vec{V}_2 + \vec{V}_{e1} = c_{12}\vec{V}_2 + \vec{V}_e = c_2\vec{V}_2 + \vec{V}_{e2}$$

$$\vec{V}_1 = c\vec{V}_2 + \vec{E}$$

分解原则：误差最小

$$\min_c \left\| \vec{V}_1 - c\vec{V}_2 \right\|$$

$$\vec{V}_e \perp \vec{V}_2 \quad \Rightarrow \vec{V}_e \cdot \vec{V}_2 = 0$$

$$c_{12}V_2 = V_1 \cos \widehat{\vec{V}_1\vec{V}_2}$$

$$c_{12} = \frac{V_1 \cos \widehat{\vec{V}_1\vec{V}_2}}{V_2} = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{\vec{V}_2 \cdot \vec{V}_2}$$ 相关系数

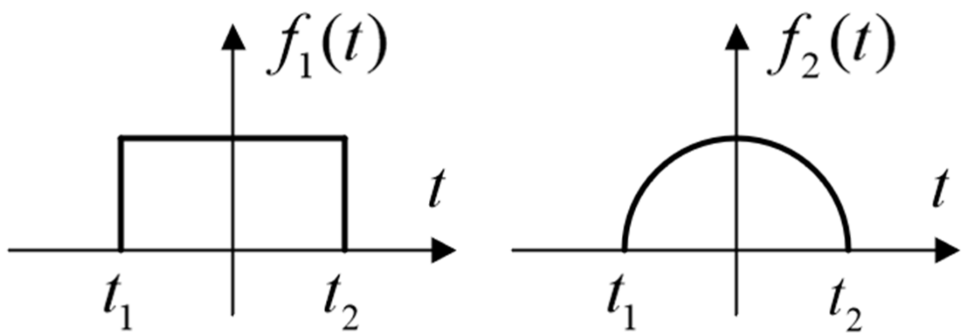
如果两个矢量的相关系数为0，则称两矢量正交。

$$\vec{V}_i \cdot \vec{V}_j = 0$$

正交分解与正交函数集

- 函数的正交分解

有两个函数$f_1(t)$ 和 $f_2(t)$，试用$f_2(t)$来表示 $f_1(t)$



$$f_1(t):?\, f_2(t)$$

$$f_1(t):\ \ cf_2(t)$$

$$f_1(t) = cf_2(t) + f_e(t)$$

分解原则：误差最小

$$\min_c \left\| f_1(t) - cf_2(t) \right\|$$

$$\boxed{\left\| f(t) \right\| \triangleq \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)dt}$$

$$\frac{d}{dc}\int_{t_1}^{t_2} (f_1(t) - cf_2(t))^2 dt = 0$$

$$c = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)\cdot f_2(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t)dt}$$ 相关系数

如果两个函数的相关系数为**0**，则称两函数正交。

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t)\cdot f_2(t)dt = 0$$

3.1 引言

正交分解与正交函数集

- 正交函数集

如果一组函数 $g_1(t), g_2(t), \cdots, g_n(t)$ 相互正交：

$$\int_{t_1}^{t_2} g_i(t)\cdot g_j(t)dt = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ K_i & i == j \end{cases} \qquad \int_{t_1}^{t_2} g_i(t)\cdot g^*_j(t)dt = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ K_i & i == j \end{cases}$$

则称正交函数集，$g_1(t), g_2(t), \cdots, g_n(t)$ 称为基底函数。

任意信号 $f(t)$ 可表示为 n 维正交函数之和：

$$f(t) \approx c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t) + \cdots + c_n g_n(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i g_i(t)$$

其中 $c_i = \dfrac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\cdot g_i(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} g_i^2(t)dt} = \dfrac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\cdot g_i(t)dt}{K_i}$ $\qquad c_i = \dfrac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\cdot g^*_i(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} g_i(t) g^*_i(t)dt}$

3.1 引言

■ 正交分解与正交函数集

- 完备正交函数集

$$f(t)\boxed{\approx}c_1g_1(t)+c_2g_2(t)+\cdots+c_ng_n(t)=\sum_{i=1}^{n}c_ig_i(t)$$

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n}c_ig_i(t)+\varepsilon(t)\qquad \varepsilon(t)=f(t)-\sum_{i=1}^{n}c_ig_i(t)$$

定义：

当 n 增加时，$\|\varepsilon(t)\|$ 变小，并且 $n\to\infty$ 时 $\|\varepsilon(t)\|\to 0$，则称正交函数集 $g_1(t),g_2(t),\cdots,g_n(t)$ 是完备的正交函数集。

$$f(t)=\sum_{i=1}^{\infty}c_ig_i(t)$$

帕斯瓦尔定理：

$$\int_{t_1}^{t_2}f^2(t)dt=\sum_{i=1}^{\infty}c_i^2\int_{t_1}^{t_2}g_i^2(t)dt=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{t_1}^{t_2}(c_ig_i(t))^2dt$$

三角函数形式的傅里叶级数

周期函数$f(t)$可由三角函数的线性组合来表示，若$f(t)$的周期为T_1，角频率$\omega_1=\frac{2\pi}{T_1}$，频率$f_1=\frac{1}{T_1}$，满足狄利赫里条件时，傅里叶级数展开表达式为

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_1 t+b_n\sin n\omega_1 t)$$

直流分量 $$a_0=\frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1}f(t)dt$$

余弦分量幅度 $$a_n=\frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1}f(t)\cos n\omega_1 t dt$$ 偶函数

正弦分量幅度 $$b_n=\frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1}f(t)\sin n\omega_1 t dt$$ 奇函数

正交函数集：$\{\sin k\omega_1 t,\cos k\omega_1 t\}(k=0,1,\cdots)$

三角函数形式的傅里叶级数

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta+\varphi)$$

$$tg\varphi = -\frac{b}{a}$$

三角形式的傅里叶级数也可表示为

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$$

$$c_0 = a_0$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\varphi_n = tg^{-1}(-\frac{b_n}{a_n})$$

$$a_n = c_n \cos\varphi_n$$

$$b_n = -c_n \sin\varphi_n$$

$$f(t) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin(n\omega_1 t + \theta_n)$$

$$d_0 = a_0$$

$$d_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\theta_n = tg^{-1}(\frac{a_n}{b_n})$$

$$a_n = d_n \sin\theta_n$$

$$b_n = d_n \cos\theta_n$$

2.2 周期信号的频谱分析——傅里叶级数

■ 三角函数形式的傅里叶级数

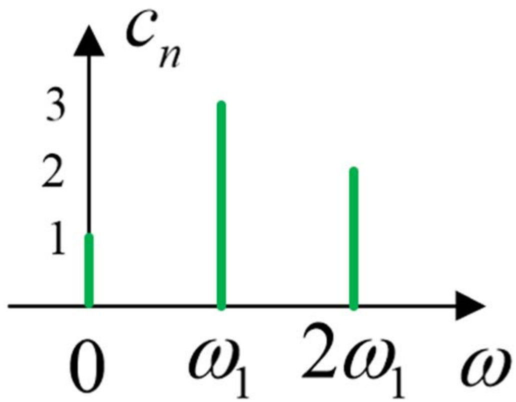
$$f(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos(n\omega_1 t+\varphi_n)$$

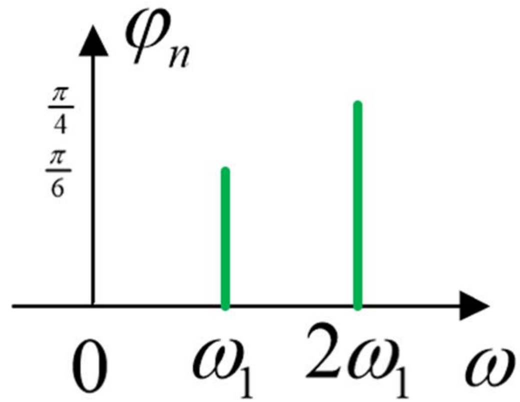
周期信号可以分解为直流、基波和各次谐波的线性组合。

$c_n\sim\omega$ 关系称为幅度频谱

$\varphi_n\sim\omega$ 关系称为相位频谱

例：$f(x)=1+3\cos(\omega_1 t+\frac{\pi}{6})+2\cos(2\omega_1 t+\frac{\pi}{4})$





注意要点：

1. 余弦函数形式

2. Cn非负

3. 相位的范围[-pi/2, pi/2]

指数形式的傅里叶级数

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_1 t+b_n\sin n\omega_1 t)$$

$$e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$$

$$\cos\theta=\tfrac{1}{2}(e^{j\theta}+e^{-j\theta})$$

$$\sin\theta=\tfrac{1}{2j}(e^{j\theta}-e^{-j\theta})$$

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{e^{jn\omega_1 t}+e^{-jn\omega_1 t}}{2}+b_n\frac{e^{jn\omega_1 t}-e^{-jn\omega_1 t}}{2j}\right)$$

$$=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-jb_n}{2}e^{jn\omega_1 t}+\frac{a_n+jb_n}{2}e^{-jn\omega_1 t}\right)$$

$$F(n\omega_1)=\tfrac{1}{2}(a_n-jb_n)$$

$$=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[F(n\omega_1)e^{jn\omega_1 t}+F(-n\omega_1)e^{-jn\omega_1 t}]$$

$$F(0)=a_0$$

$$\boxed{f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(n\omega_1)e^{jn\omega_1 t}}$$

正交函数集：$\{e^{jn\omega_1 t}\}(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ $F(n\omega_1)=F_n=\dfrac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1}f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$

3.2 周期信号的频谱分析——傅里叶级数

- 指数形式的傅里叶级数

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(n\omega_1)e^{jn\omega_1 t}$$

$$F_n=\frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1}f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$$

变换对

$$F_n=\left|F_n\right|e^{j\varphi_n}=\tfrac{1}{2}(a_n-jb_n)$$

幅频特性： $$\left|F_n\right|=\tfrac{1}{2}\sqrt{a_n^2+b_n^2}=\tfrac{1}{2}c_n$$ 偶函数

相频特性： $$\varphi_n=\arctan(-\frac{b_n}{a_n})$$ 奇函数

3.2 周期信号的频谱分析——傅里叶级数

- 三角形式和指数形式的傅里叶级数的系数关系

$$|F_n| = |F_{-n}| = \tfrac{1}{2}c_n = \tfrac{1}{2}d_n = \tfrac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$|F_n| + |F_{-n}| = c_n$$

$$F_n + F_{-n} = a_n$$

$$j(F_n - F_{-n}) = b_n$$

$$c_n^2 = d_n^2 = a_n^2 + b_n^2 = 4F_n F_{-n}$$

$$F_0 = c_0 = d_0 = a_0$$

周期信号频谱

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_1 t+b_n\sin n\omega_1 t)$$

$$f(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos(n\omega_1 t+\varphi_n)$$

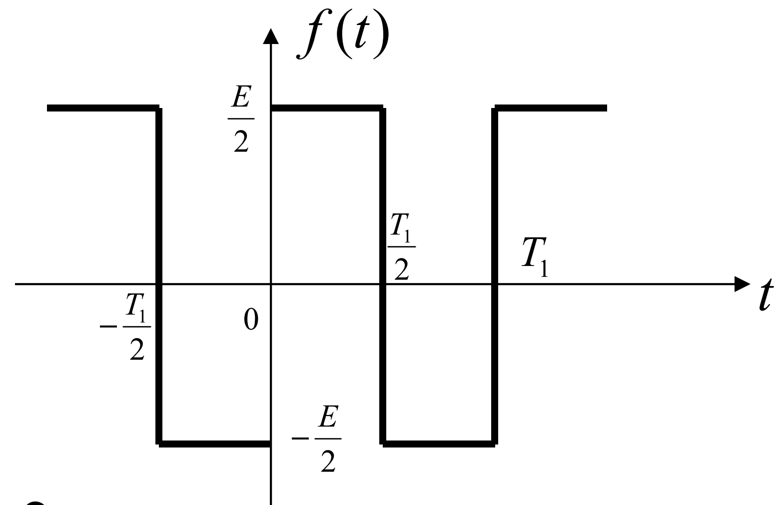
$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_1 t}$$

为了能既方便又明确地表示一个信号中含有哪些频率分量，各频率分量所占的比重怎样，就可以画出频谱图来直观地表示。

如果以频率为横轴，以幅度或相位为纵轴，绘出 c_n 及 φ_n 等的变化关系，便可直观地看出各频率分量的相对大小和相位情况，这样的图就称为三角形式表示的信号的**幅度频谱**和**相位频谱**。

例：求题图所示的周期矩形信号的三角形式与指数形式的傅里叶级数，并画出各自的频谱图。

解：一个周期内$f(t)$的表达式为：



$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{E}{2} & 0<t<\dfrac{T_1}{2}\\[2ex] -\dfrac{E}{2} & \dfrac{T_1}{2}<t<T_1\end{cases}$$

$$a_0=\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1}f(t)dt=0 \qquad a_n=\frac{2}{T_1}\int_0^{T_1}f(t)\cos n\omega_1 t dt=0$$

$$b_n=\frac{2}{T_1}\int_0^{T_1}f(t)\sin n\omega_1 t dt=\begin{cases}\dfrac{2E}{n\pi} & n=1,3,5\cdots\\[2ex] 0 & n=2,4,6\cdots\end{cases}$$

3.2 周期信号的频谱分析——傅里叶级数

$$c_n = b_n = \begin{cases} \dfrac{2E}{n\pi} & n = 1,3,5\cdots \\ 0 & n = 2,4,6\cdots \end{cases}$$

$$\varphi_n = \arctan(-\frac{b_n}{a_n}) = -\frac{\pi}{2} \quad (n = 1,3,5\cdots)$$

$$f(t) = \frac{2E}{\pi} \sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\omega_1 t$$

$$= \frac{2E}{\pi} (\sin \omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_1 + \cdots)$$

或 $$f(t) = \frac{2E}{\pi} \sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty} \frac{1}{n} \cos(n\omega_1 t - \frac{\pi}{2})$$

3.2 周期信号的频谱分析——傅里叶级数

$$F_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = -j\frac{b_n}{2} = \begin{cases} -\dfrac{jE}{n\pi} & n = \pm1, \pm3, \pm5\cdots \\ 0 & n = \pm2, \pm4, \pm6\cdots \end{cases}$$

$$f(t) = -\frac{jE}{\pi}e^{j\omega_1 t} - \frac{jE}{3\pi}e^{j3\omega_1 t} - \cdots + \frac{jE}{\pi}e^{-j\omega_1 t} + \frac{jE}{3\pi}e^{-j3\omega_1 t} + \cdots$$

$$|F_n| = \left|\frac{E}{n\pi}\right| \quad (n = \pm1, \pm3, \pm5\cdots)$$

$$\varphi_n = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} & (n = 1, 3, 5\cdots) \\ \dfrac{\pi}{2} & (n = -1, -3, -5\cdots) \end{cases}$$

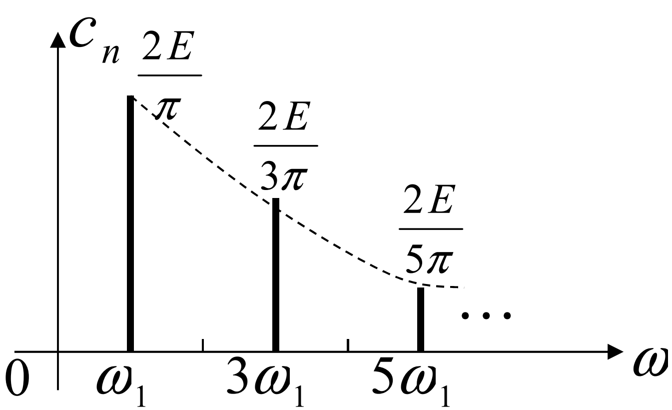
3.2 周期信号的频谱分析——傅里叶级数

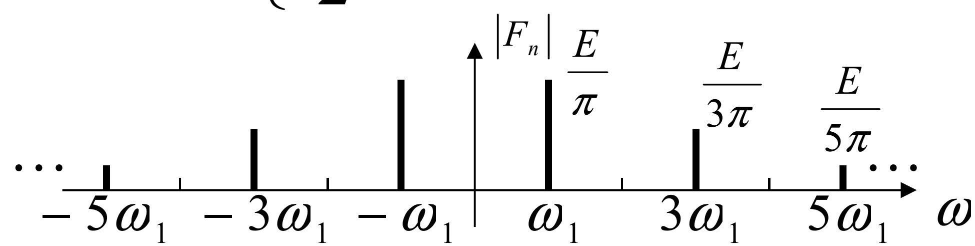
$$c_n=\begin{cases}\dfrac{2E}{n\pi} & n=1,3,5\cdots\\ 0 & n=2,4,6\cdots\end{cases}$$

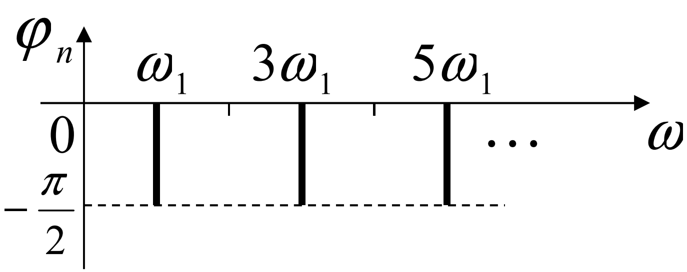
$$\varphi_n=-\frac{\pi}{2}\quad(n=1,3,5\cdots)$$

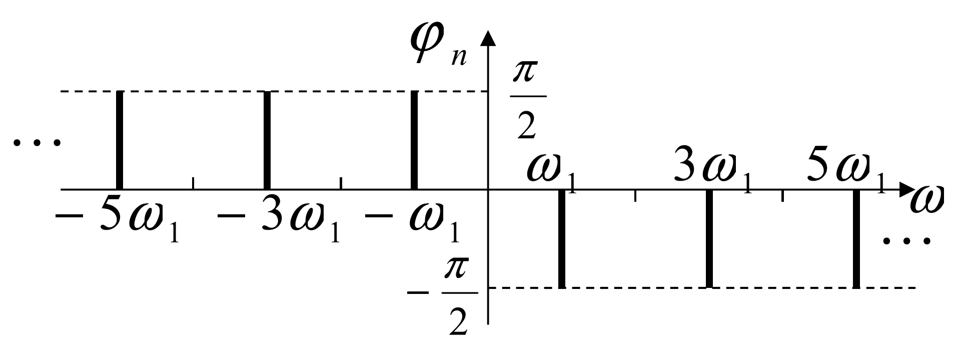
$$|F_n|=\left|\frac{E}{n\pi}\right|\qquad(n=\pm1,\pm3,\pm5\cdots)$$

$$\varphi_n=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2} & (n=1,3,5\cdots)\\ \dfrac{\pi}{2} & (n=-1,-3,-5\cdots)\end{cases}$$









周期信号频谱的特点

（1）离散性 -------- 频谱是离散的而不是连续的，这种频谱称为离散频谱。

（2）谐波性 -------- 谱线出现在基波频率 ω_1 的整数倍上。

（3）收敛性 -------- 幅度谱的谱线幅度随着 $n \to \infty$ 而逐渐衰减到零。

■ 周期信号的功率特性

- 周期信号的平均功率P

$$P=\overline{f^2(t)}=\frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1} f^2(t)dt$$

$$=a_0^2+\tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=c_0^2+\tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}c_n^2$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|F_n\right|^2$$

3.2 周期信号的频谱分析——傅里叶级数

函数的对称性与傅立叶系数的关系

- 偶函数 $f(t)=f(-t)$

$$a_0=\frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)dt=\frac{2}{T_1}\int_{0}^{\frac{T_1}{2}} f(t)dt$$

$$a_n=\frac{2}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)\cos n\omega_1 t dt=\frac{4}{T_1}\int_{0}^{\frac{T_1}{2}} f(t)\cos n\omega_1 t dt$$

$$b_n=\frac{2}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)\sin n\omega_1 t dt=0$$

所以，在**偶函数**的傅里叶级数中**没有正弦分量**，只可能含有直流和余弦分量。

■ 函数的对称性与傅立叶系数的关系

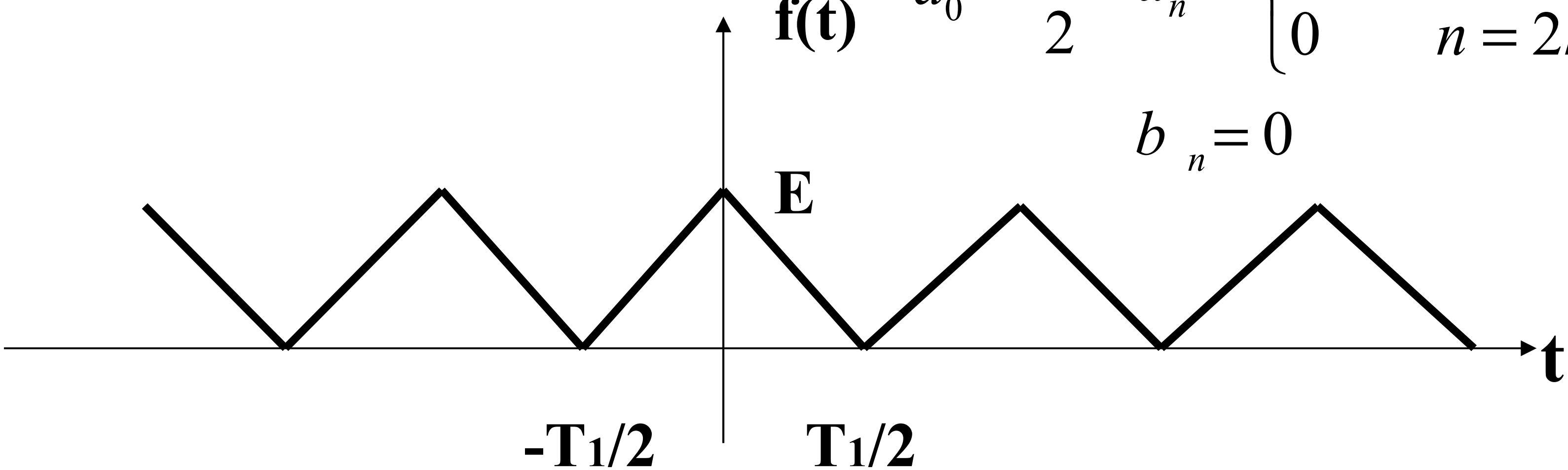
- 偶函数 $f(t)=f(-t)$

例：周期三角函数是偶函数

$$f(t)=\begin{cases}\frac{2E}{T_1}t+E & -\frac{T_1}{2}\le t\le 0\\ -\frac{2E}{T_1}t+E & 0\le t\le\frac{T_1}{2}\end{cases}$$

$$a_0=\frac{E}{2}\qquad a_n=\begin{cases}\frac{4E}{\pi^2n^2} & n=2k+1\\ 0 & n=2k\end{cases}$$

$$b_n=0$$



$$f(t)=\frac{E}{2}+\frac{4E}{\pi^2}(\cos\omega_1t+\frac{1}{9}\cos3\omega_1t+\frac{1}{25}\cos5\omega_1t+.....)$$

函数的对称性与傅立叶系数的关系

- 奇函数 $f(t) = -f(-t)$

$$a_0 = \frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)dt = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)\cos n\omega_1 t dt = 0$$

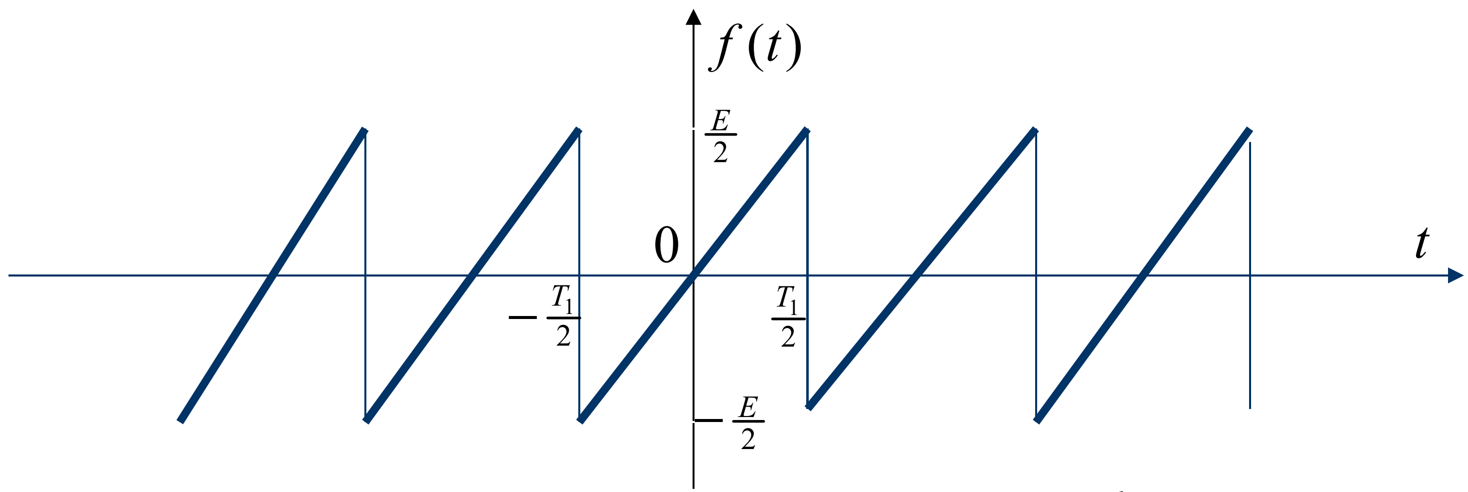
$$b_n = \frac{2}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)\sin n\omega_1 t dt = \frac{4}{T_1}\int_{0}^{\frac{T_1}{2}} f(t)\sin n\omega_1 t dt$$

所以，在奇函数的傅里叶级数中没有直流与余弦分量，只可能包含正弦分量。

函数的对称性与傅立叶系数的关系

- 奇函数 $f(t) = -f(-t)$

例:周期锯齿波是奇函数



$$f(t) = \frac{E}{T_1} t \quad \left(-\frac{T_1}{2} < t < \frac{T_1}{2}\right) \qquad a_0 = 0 \quad a_n = 0 \quad b_n = \begin{cases} \frac{E}{\pi n} & n = 2k+1 \\ -\frac{E}{\pi n} & n = 2k \end{cases}$$

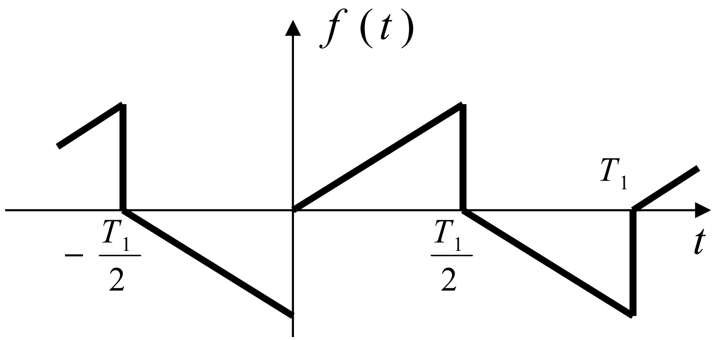
$$f(t) = \frac{E}{\pi}\left(\sin \omega_1 t - \frac{1}{2}\sin 2\omega_1 t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_1 t - \ldots\right)$$

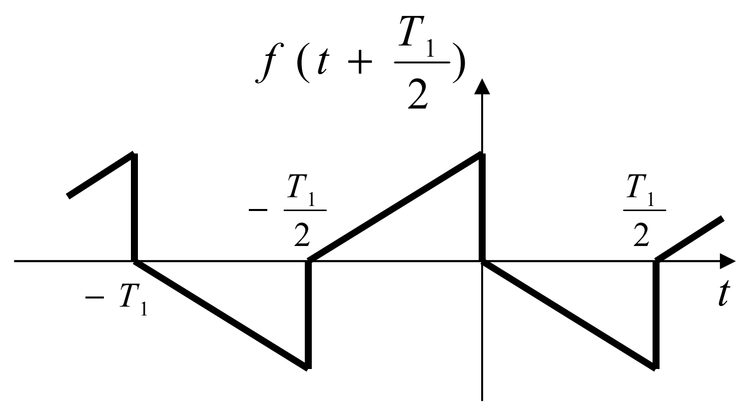
3.2 周期信号的频谱分析——傅里叶级数

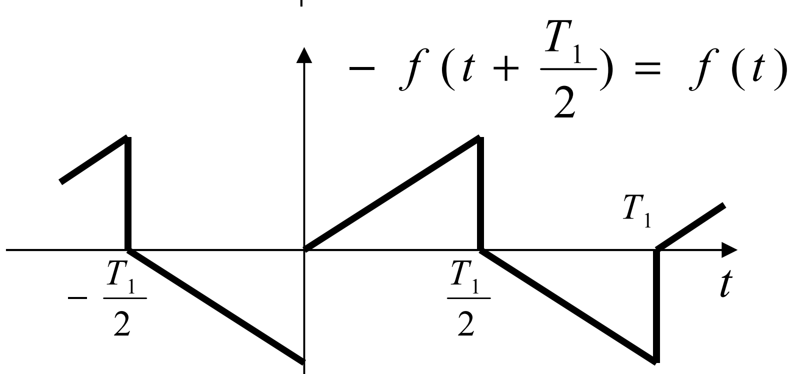
函数的对称性与傅立叶系数的关系

- 奇谐函数 $f(t)=-f(t\pm\frac{T_1}{2})$

波形沿时间轴平移半个周期并相对于该轴上下反转，此时波形并不发生改变，称半波对称函数或奇谐函数







$$f(t+\frac{nT_1}{2})=f(t\pm\frac{nT_1}{2})$$

函数的对称性与傅立叶系数的关系

- 奇谐函数 $f(t)=-f(t\pm\frac{T_1}{2})$

$$a_0=0$$

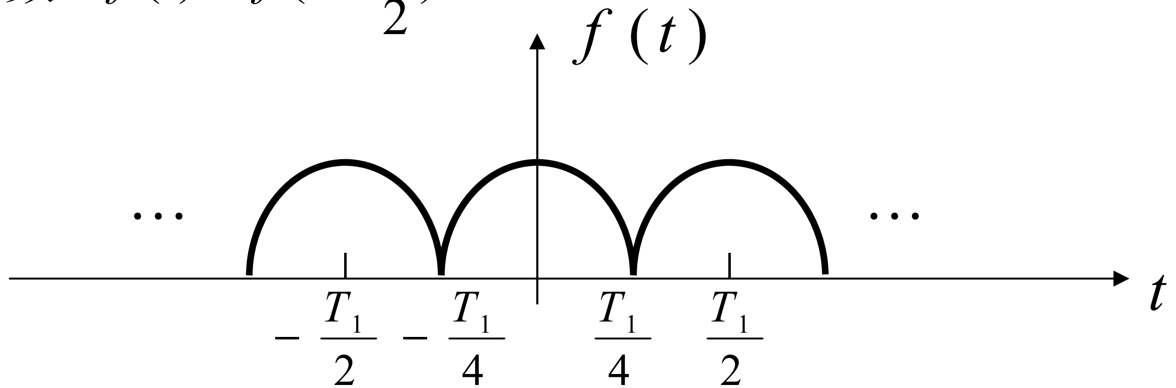
$$a_n=\begin{cases}0 & (n=2,4,6\cdots)\\ \dfrac{4}{T_1}\int_0^{\frac{T_1}{2}}f(t)\cos n\omega_1 t dt & (n=1,3,5\cdots)\end{cases}$$

$$b_n=\begin{cases}0 & (n=2,4,6\cdots)\\ \dfrac{4}{T_1}\int_0^{\frac{T_1}{2}}f(t)\sin n\omega_1 t dt & (n=1,3,5\cdots)\end{cases}$$

可见，在奇谐函数的傅里叶级数中，没有直流和偶次谐波分量，只会含有基波和奇次谐波的正弦、余弦分量。

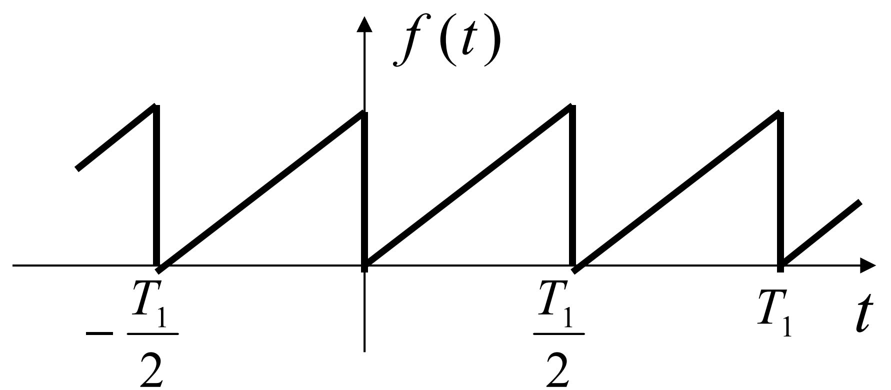
函数的对称性与傅立叶系数的关系

- 偶谐函数 $f(t)=f(t\pm\frac{T_1}{2})$



在**偶谐函数**的傅里叶级数中，**没有奇次谐波分量**，只会含有（直流）与偶次谐波的正弦、余弦分量。

例：



傅里叶有限级数

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_1 t+b_n\sin n\omega_1 t)$$

- 如果完全逼近，则 $n=1\cdots\infty$;
- 实际中 $n=1\cdots N$, N是有限整数。
- 如果 N 愈接近∞，则其均方误差愈小
- 若用 $2N+1$ 项逼近，则

$$S_N(t)=a_0+\sum_{n=1}^{N}(a_n\cos\omega_1 t+b_n\sin\omega_1 t)$$

误差函数： $\varepsilon_N(t)=f(t)-S_N(t)$

均方误差： $E_N=\overline{\varepsilon_N^2(t)}=\overline{f^2(t)}-[a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(a_n^2+b_n^2)]$

3.2 周期信号的频谱分析——傅里叶级数

■ 傅里叶有限级数

对称方波有限项的傅里叶级数

- N=1

$$S_1 = \frac{2E}{\pi}(\cos\omega_1 t)$$

$$E_1 \approx 0.05E^2$$

- N=2

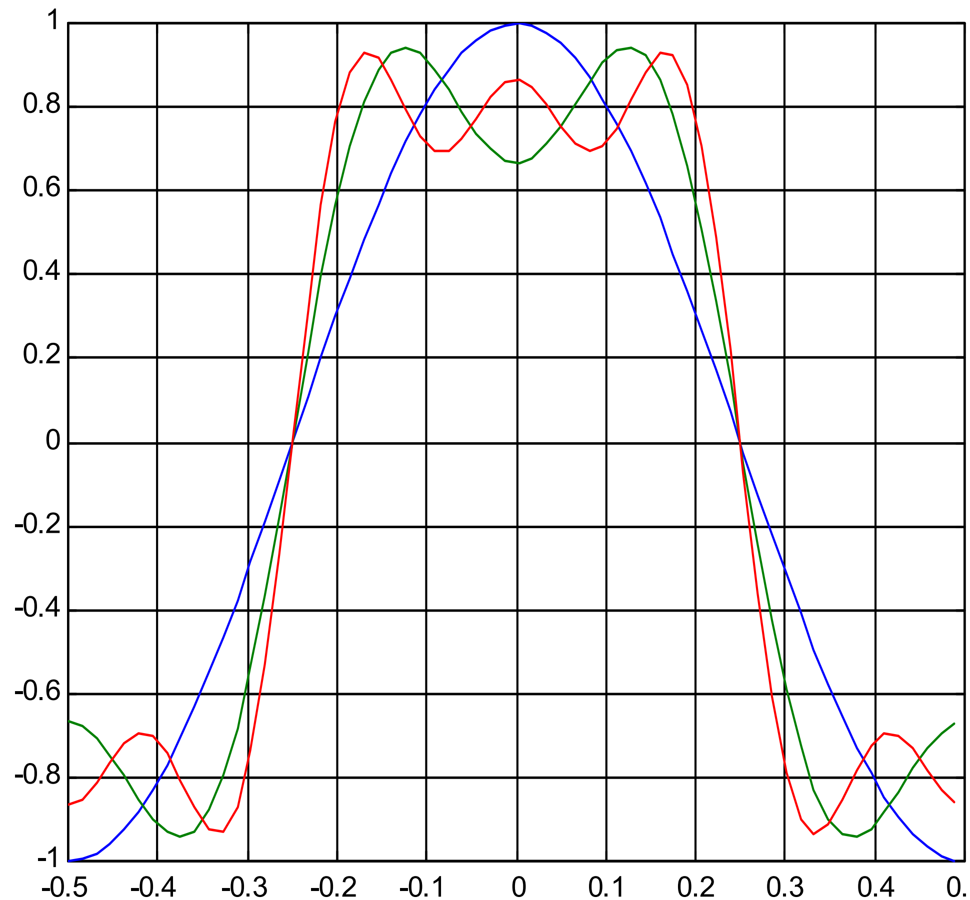
$$S_2 = \frac{2E}{\pi}(\cos\omega_1 t - \frac{1}{3}\cos 3\omega_1 t)$$

$$E_2 = 0.02E^2$$

- N=3

$$S_3 = \frac{2E}{\pi}(\cos\omega_1 t - \frac{1}{3}\cos 3\omega_1 t + \frac{1}{5}\cos 5\omega_1 t)$$

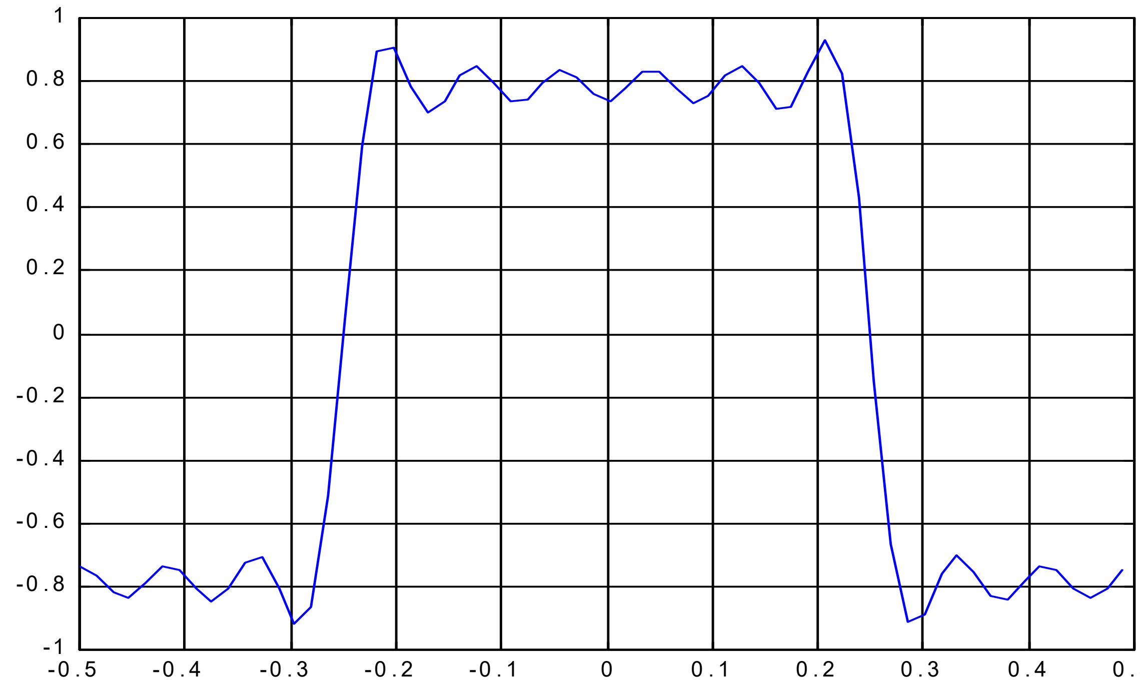
$$E_3 = 0.015E^2$$



■ 傅里叶有限级数

对称方波有限项的傅里叶级数

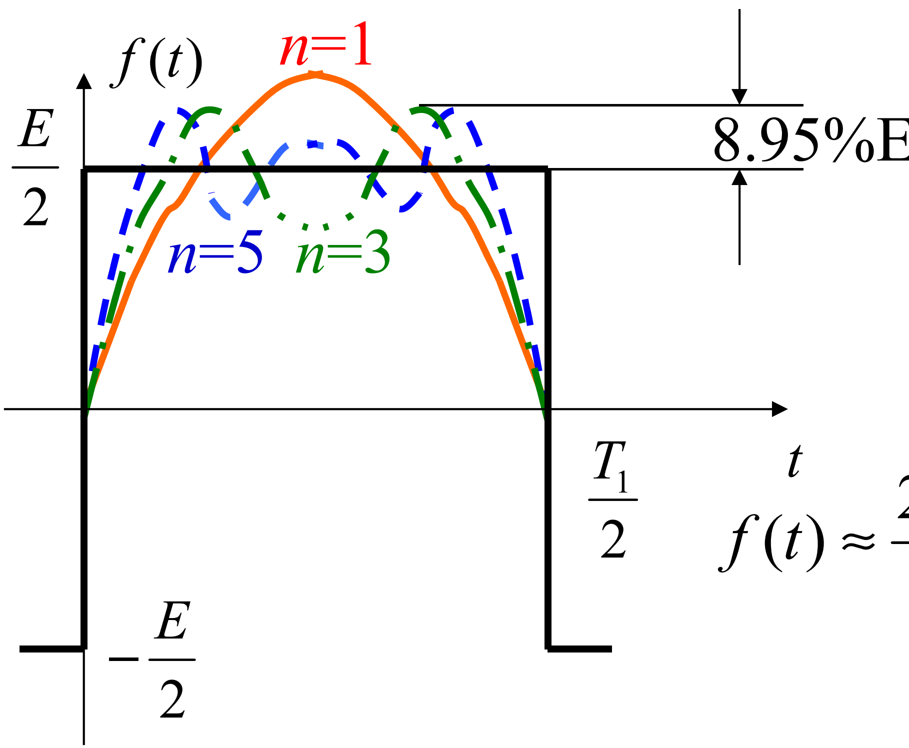
- N越大，越接近方波
- 快变信号，高频分量，主要影响跳变沿；
- 慢变信号，低频分量，主要影响顶部；
- 任一分量的幅度或相位发生相对变化时，波形将会失真
- 有吉伯斯现象发生



$$S_{11}=\frac{2E}{\pi}(\cos\omega_1 t-\frac{1}{3}\cos 3\omega_1 t+\frac{1}{5}\cos 5\omega_1 t+\cdots-\frac{1}{11}\cos 11\omega_1 t)$$

■ 傅里叶有限级数

吉伯斯（Gibbs）现象



n=1: $$f(t) \approx \frac{2E}{\pi}\sin\omega_1 t$$

n=3: $$f(t) \approx \frac{2E}{\pi}(\sin\omega_1 t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_1 t)$$

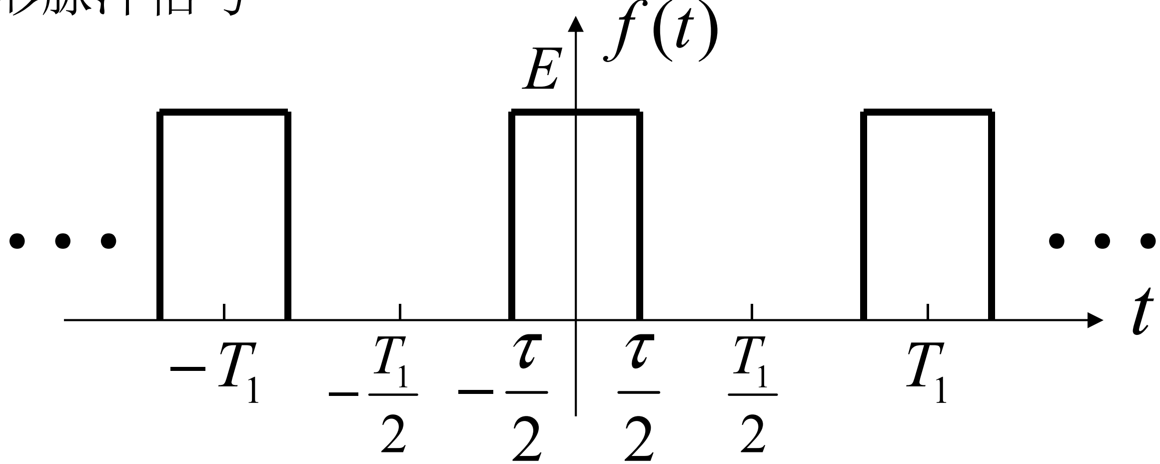
n=5: $$f(t) \approx \frac{2E}{\pi}(\sin\omega_1 t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_1 t + \frac{1}{5}\sin 5\omega_1)$$

$$f(t) = \frac{2E}{\pi}(\sin\omega_1 t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_1 t + \frac{1}{5}\sin 5\omega_1 + \cdots)$$

3.2 周期信号的频谱分析——傅里叶级数

典型周期信号的频谱

- 周期矩形脉冲信号



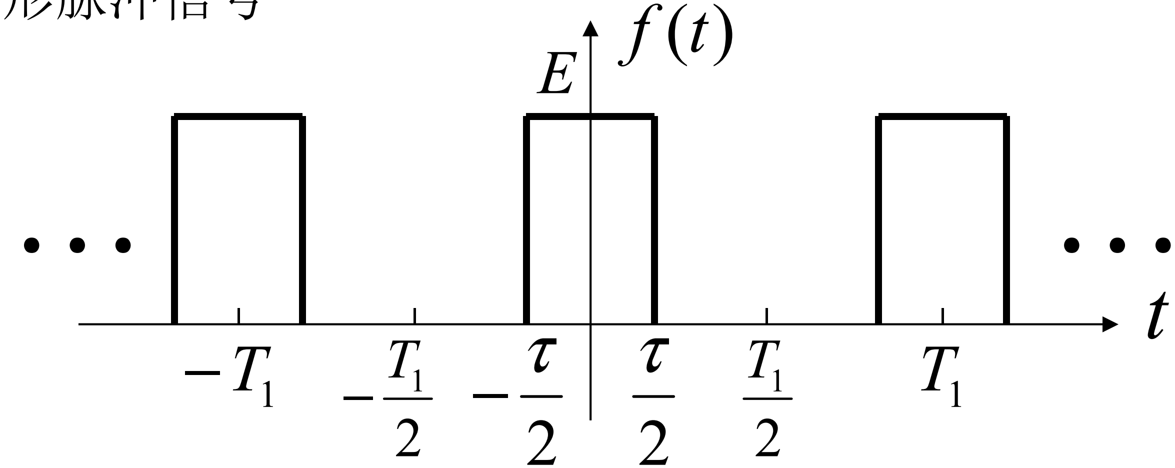
$$a_0 = \frac{2}{T_1}\int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t)dt = \frac{2}{T_1}\int_0^{\frac{\tau}{2}} Edt = \frac{E\tau}{T_1}$$

$$a_n = \frac{4}{T_1}\int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t)\cos n\omega_1 t dt = \frac{4}{T_1}\int_0^{\frac{\tau}{2}} E\cos n\omega_1 t dt = \frac{2E\tau}{T_1}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) = c_n$$

$$b_n = 0$$

典型周期信号的频谱

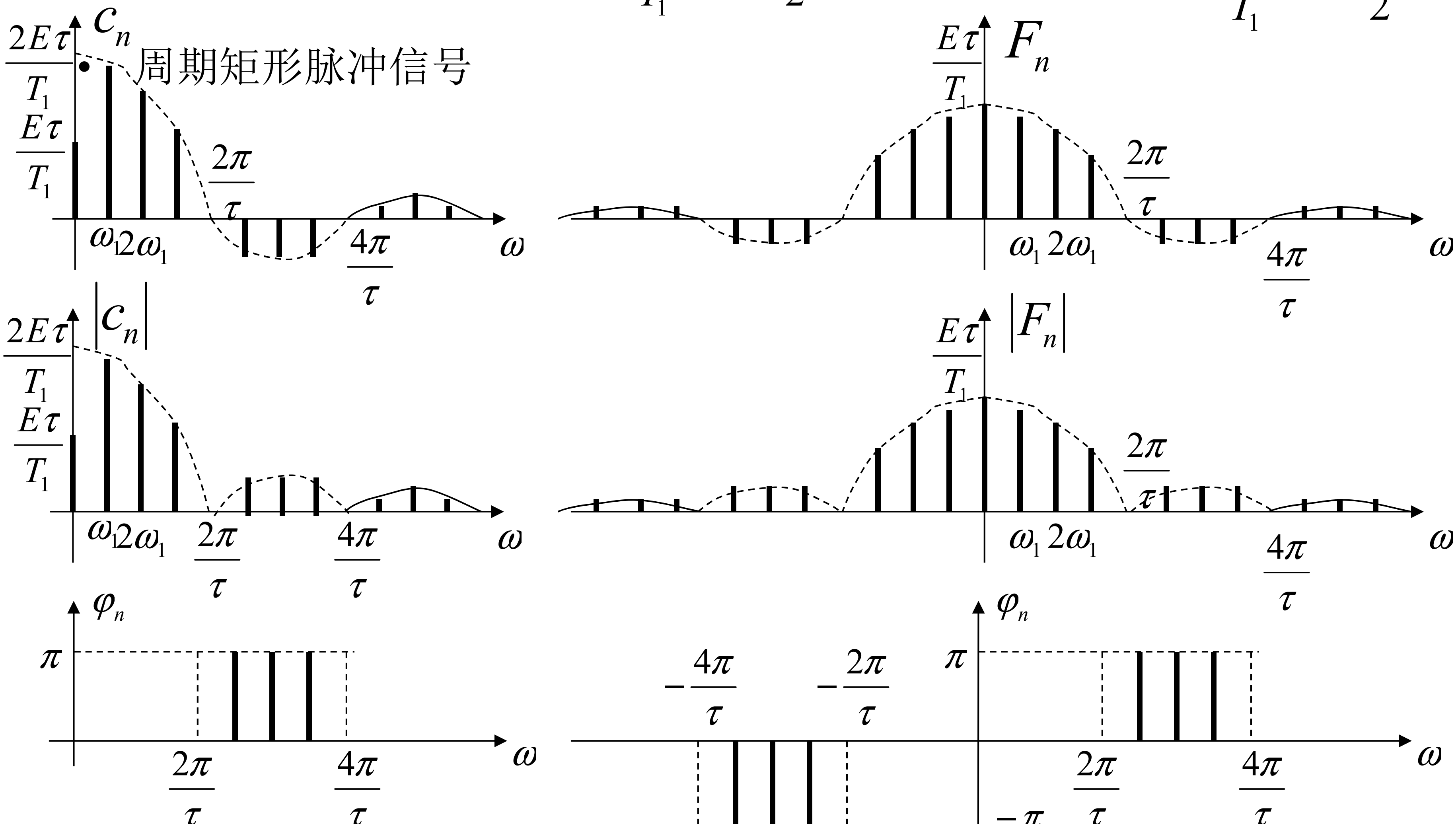
- 周期矩形脉冲信号



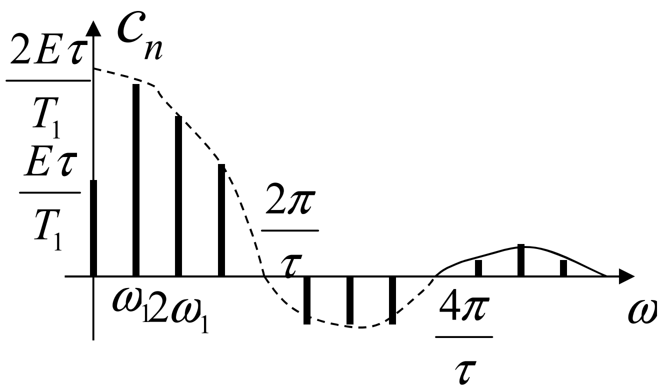
$$f(t) = \frac{E\tau}{T_1} + \frac{2E\tau}{T_1}\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)\cos n\omega_1 t$$

$$F_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = \frac{1}{2}a_n = \frac{E\tau}{T_1}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)$$

■ 典型周期信号的频谱 $c_n = \frac{2E\tau}{T_1}\mathrm{Sa}(\frac{n\omega_1\tau}{2})$ $F_n = \frac{E\tau}{T_1}\mathrm{Sa}(\frac{n\omega_1\tau}{2})$



3.2 周期信号的频谱分析——傅里叶级数



若 $\frac{\tau}{T_1}=\frac{1}{4}$

则 $\omega_1=\frac{2\pi}{T_1}=\frac{2\pi}{4\tau}=\frac{1}{4}(\frac{2\pi}{\tau})$

因此，第一个零值点之内或两个相邻的零值点之间有3根谱线。

一般情况： 若 $\frac{\tau}{T_1}=\frac{1}{n}$ 则

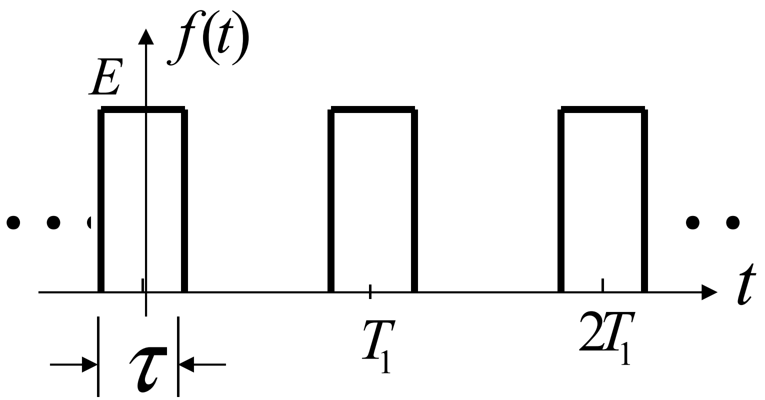
第一个零值点之内或两个相邻的零值点之间有n-1根谱线。

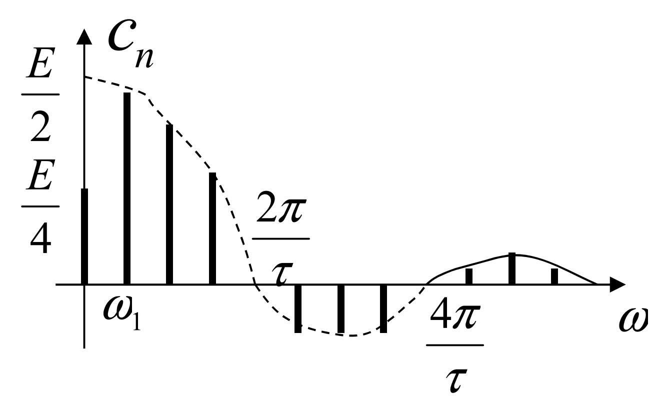
频带宽度： $B_\omega=\frac{2\pi}{\tau}$ 或 $B_f=\frac{1}{\tau}$

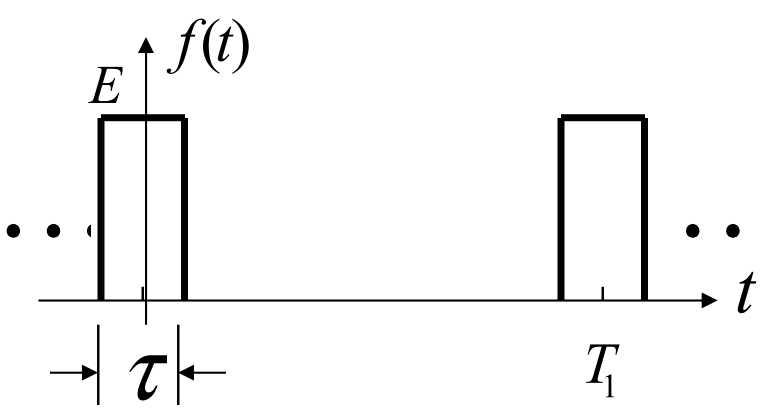
结论：矩形脉冲的频带宽度与脉冲宽度成反比。

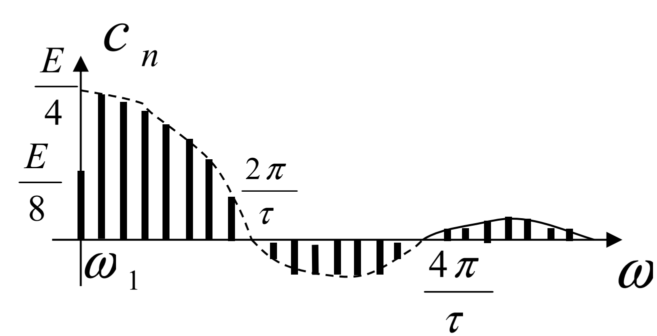
频谱结构与波形参数的关系（T_1，τ）

1.若τ不变，T_1扩大一倍，即 $T_1=4\tau \rightarrow T_1=8\tau$



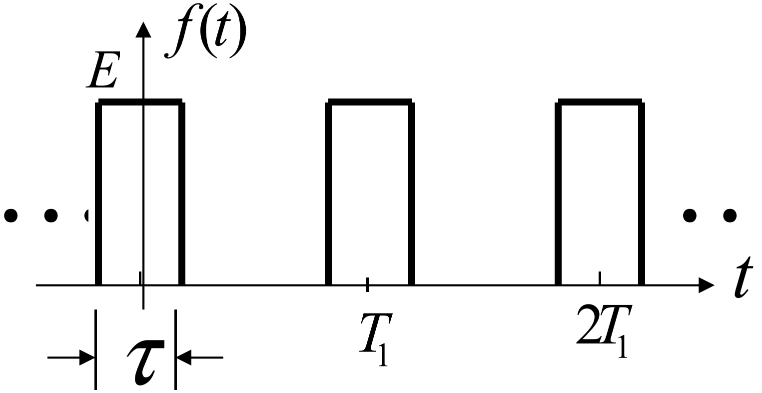


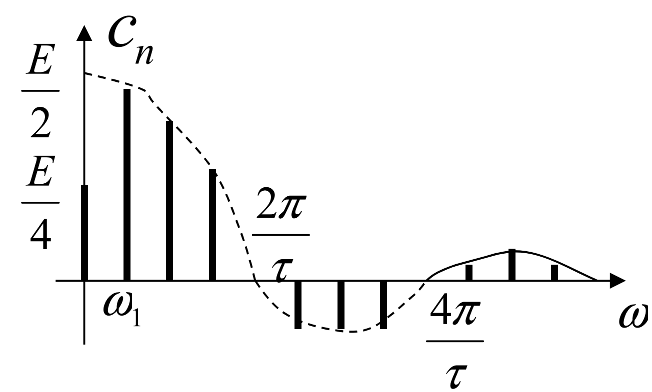


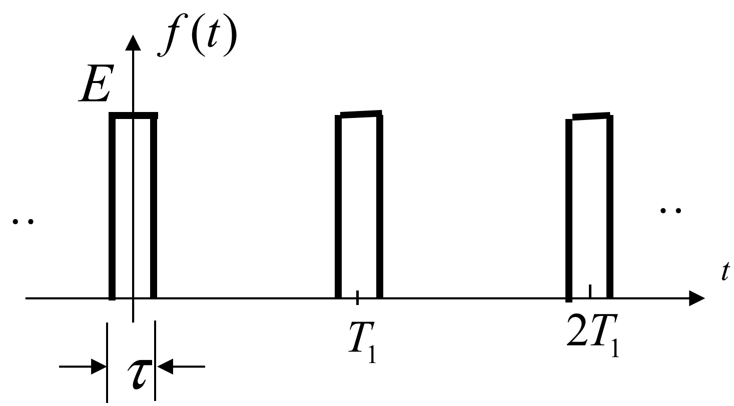


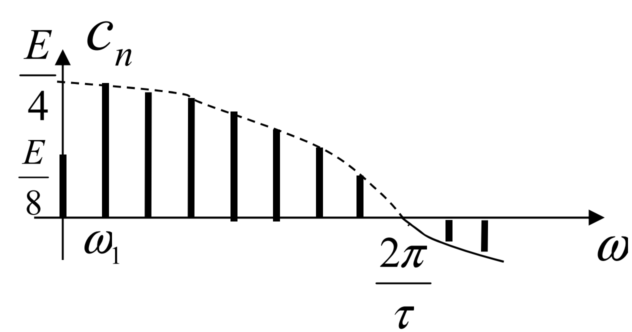
3.2 周期信号的频谱分析——傅里叶级数

2.若T_1不变，τ 减小一半，即 $T_1=4\tau \to T_1=8\tau$





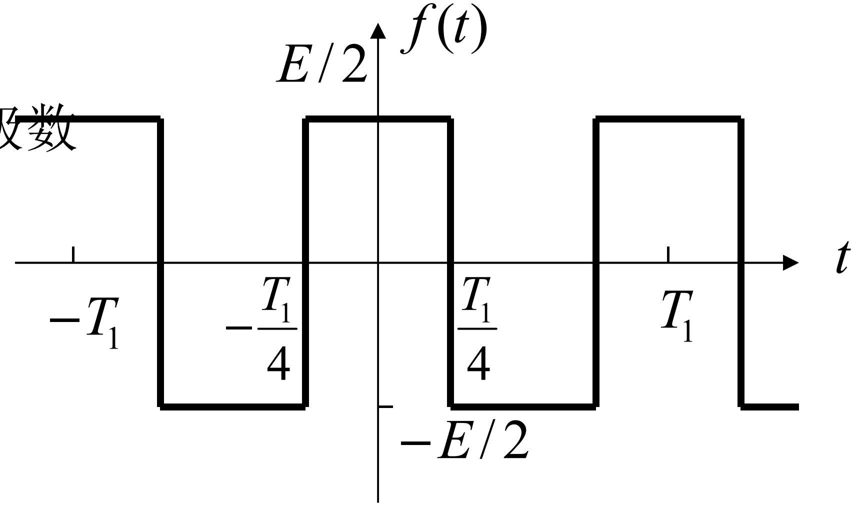




谱线间隔 $\omega_1(=\frac{2\pi}{T_1})$ 只与周期 T_1 有关，且与T_1 成反比；零值点频率 $\frac{2\pi}{\tau}$ 只与τ 有关，且与 τ 成反比；而谱线幅度与 T_1 和 τ 都有关系，且与 T_1 成反比与 τ 成正比。

典型周期信号的频谱

- 对称矩形脉冲周期信号的傅里叶级数



$$f(t)=\frac{E\tau}{T_1}+\frac{2E\tau}{T_1}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)\cos n\omega_1 t$$

令 $a_0=0,\quad T_1=2\tau$，则有

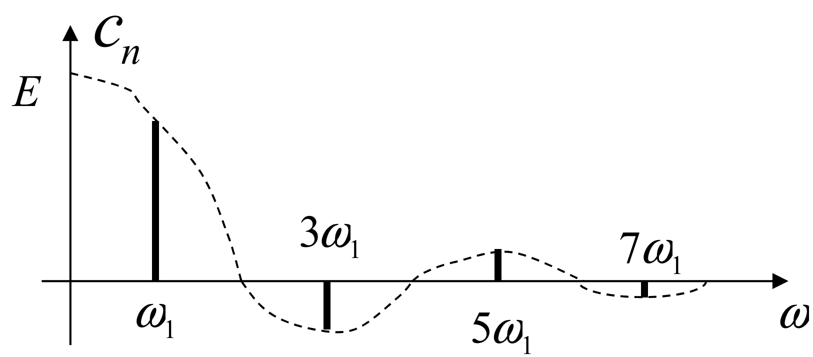
$$f(t)=E\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos n\omega_1 t$$

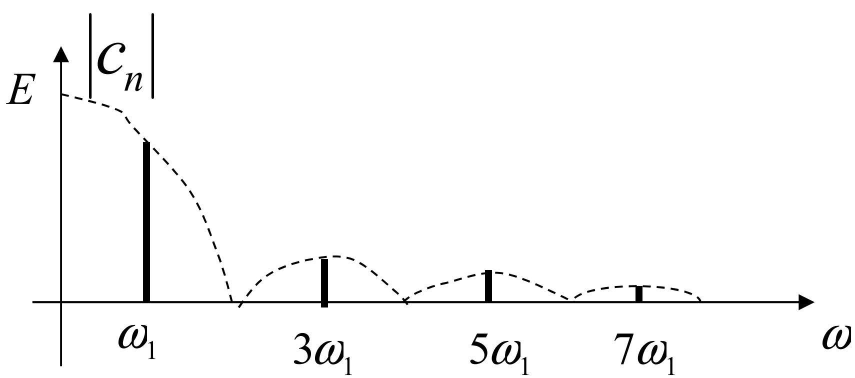
$$=\frac{2E}{\pi}\left(\cos\omega_1 t-\frac{1}{3}\cos 3\omega_1 t+\frac{1}{5}\cos 5\omega_1 t-\cdots\right)$$

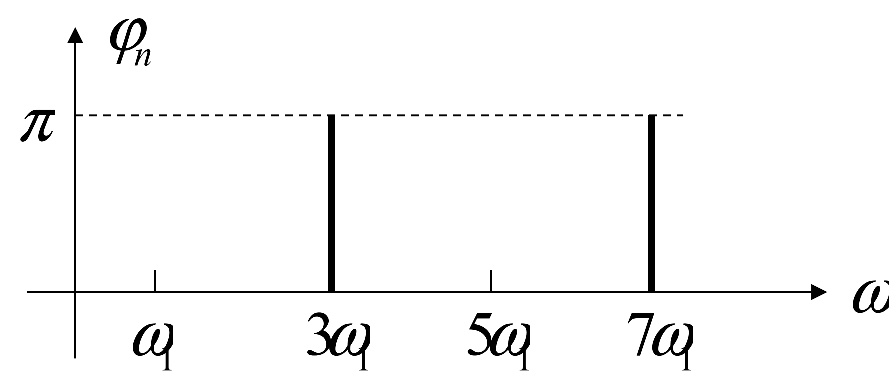
典型周期信号的频谱

- 对称矩形脉冲周期信号的傅里叶级数

$$f(t)=\frac{2E}{\pi}(\cos\omega_1 t-\frac{1}{3}\cos 3\omega_1 t+\frac{1}{5}\cos 5\omega_1 t-\cdots)$$

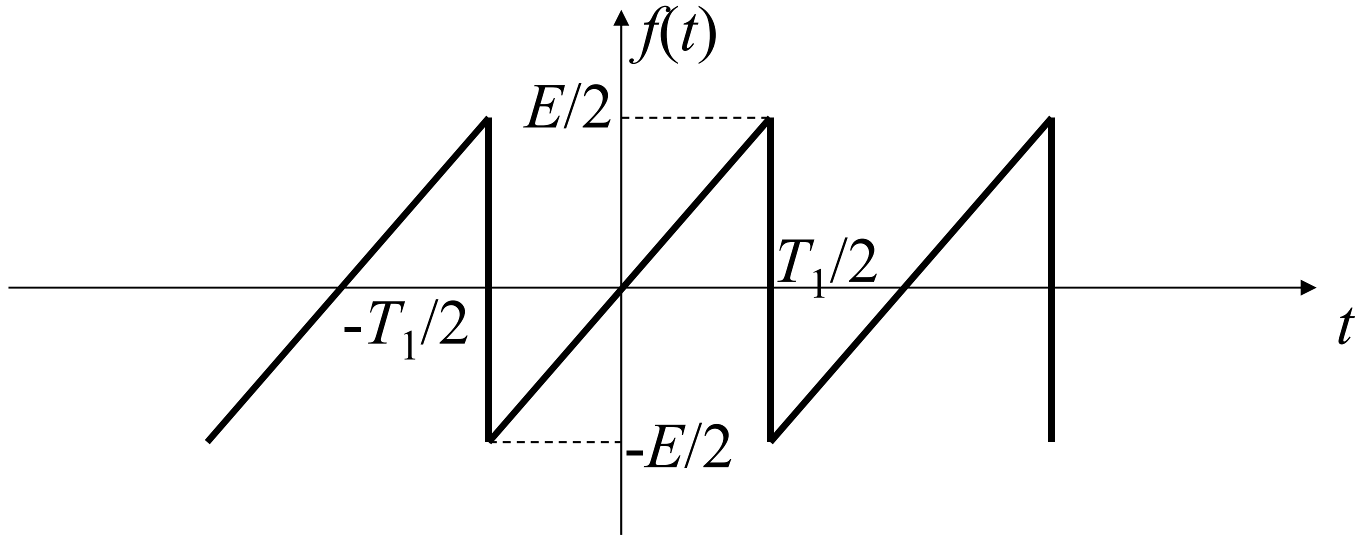






典型周期信号的频谱

- 周期锯齿脉冲信号

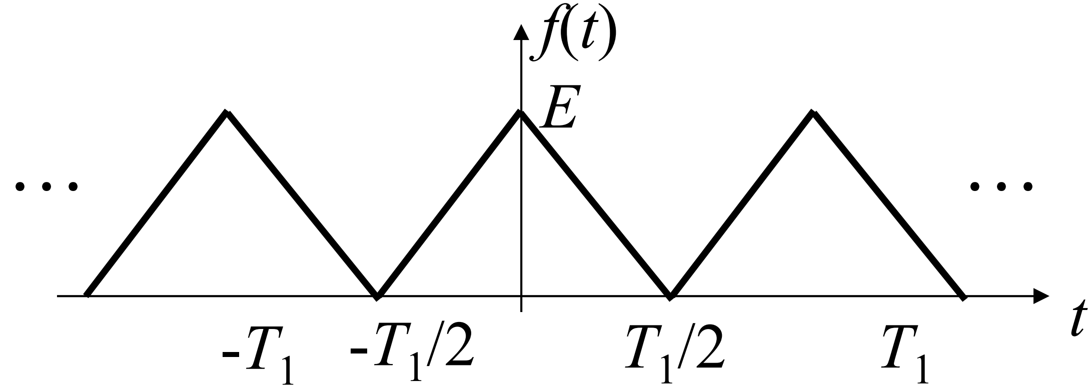


$$f(t)=\frac{E}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin n\omega_1 t$$

周期锯齿脉冲信号的频谱只包含正弦分量，谐波的幅度以$1/n$的规律收敛。

典型周期信号的频谱

- 周期三角脉冲信号

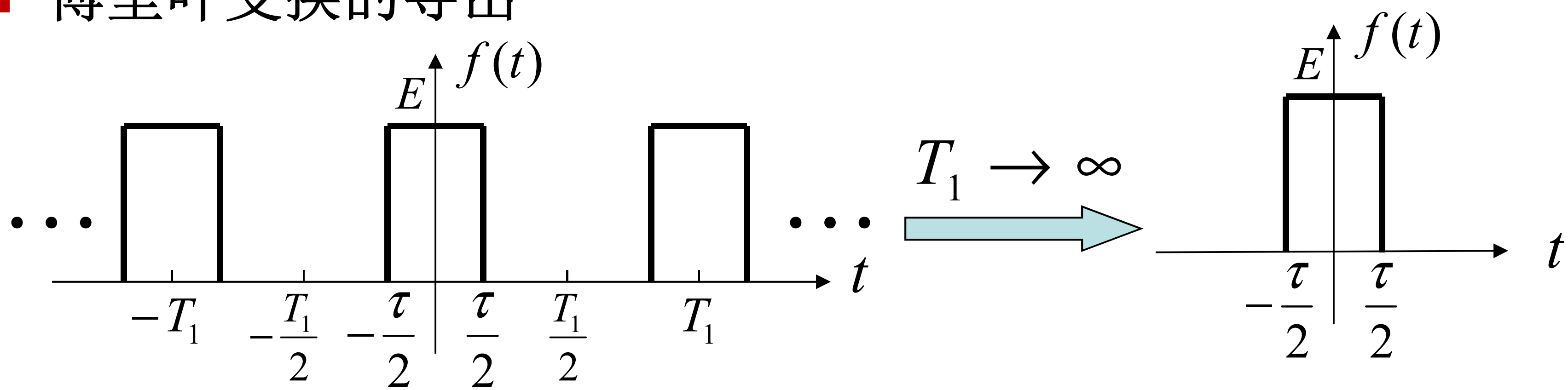


$$f(t)=\frac{E}{2}+\frac{4E}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin^2\frac{n\pi}{2}\cos n\omega_1 t$$

周期三角脉冲的频谱只包含直流、奇次谐波的余弦分量，谐波的幅度以$1/n^2$的规律收敛。

3.3 非周期信号的频谱——傅里叶变换

- 傅里叶变换的导出



$$T_1 \uparrow \Longrightarrow \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} \downarrow \Longrightarrow \text{谱线间隔} \downarrow$$

$$T_1 \to \infty \Longrightarrow \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} \to 0 \Longrightarrow \text{谱线间隔} \to 0$$

周期信号的离散谱 $\Longrightarrow$ 非周期信号的连续谱

由于 $T_1 \to \infty$, $\quad F_n = \frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \to 0$

3.3 非周期信号的频谱——傅里叶变换

■ 傅里叶变换的导出

- 频谱密度函数

$$T_1F_n=\frac{2\pi F(n\omega_1)}{\omega_1}=\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$$

当 $T_1\to\infty$时，离散频率 $n\omega_1\to$ 连续频率 ω

则 $\lim\limits_{T_1\to\infty}T_1F_n=\lim\limits_{T_1\to\infty}2\pi\frac{F(n\omega_1)}{\omega_1}=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$

记为 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]=\lim\limits_{T_1\to\infty}T_1F_n=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$

非周期信号***f(t)***的傅里叶变换

$F(\omega)=|F(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$　　$|F(\omega)|\sim\omega$:幅度频谱

$\varphi(\omega)\sim\omega$:相位频谱

■ 傅里叶变换的导出

- 逆变换

复指数形式的傅里叶级数 $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_1)e^{jn\omega_1 t}$

当 $T_1 \to \infty$ 时，$\omega_1 \to d\omega$，$n\omega_1 \to \omega$

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} \quad ✗$$

$$F(\omega)=\lim_{T_1\to\infty} T_1 F_n=\lim_{T_1\to\infty} 2\pi \frac{F(n\omega_1)}{\omega_1}$$

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{F(n\omega_1)}{\omega_1}\cdot\omega_1\cdot e^{jn\omega_1 t}$$

当 $T_1 \to \infty$ 时，$\omega_1 \to d\omega$，$n\omega_1 \to \omega$

$$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

傅里叶逆变换

傅里叶变换的导出

- 傅里叶级数与傅里叶变换比较

傅里叶逆变换：$f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$

傅里叶变换：$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$ ------连续谱、相对幅度

周期信号：$f(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_1 t}$

$$F_n=\frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1}f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$$ ------离散谱、实际幅度

F_n与$F(\omega)$的关系： $\because F(\omega)=\lim\limits_{T_1\to\infty}F_n T_1$

$$\therefore F_n=\left.\frac{F(\omega)}{T_1}\right|_{\omega=n\omega_1}$$

傅里叶变换的导出

- 傅里叶变换的物理意义

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}e^{j\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|\cos[\omega t+\varphi(\omega)]d\omega$$

$$+j\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|\sin[\omega t+\varphi(\omega)]d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}|F(\omega)|\cos[\omega t+\varphi(\omega)]d\omega$$

$$=\int_{0}^{\infty}\frac{|F(\omega)|}{\pi}d\omega\cos[\omega t+\varphi(\omega)]$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(\omega)}{2\pi}d\omega e^{j\omega t}$$

傅里叶变换的导出

- 傅里叶变换的存在条件

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

充分条件：$f(t)$ 在无限区间内满足绝对可积，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(t)\right|dt<+\infty$$

所有的能量信号均满足此条件。

$$\lim_{T\to+\infty}\int_{-T}^{T} f^2(t)dt<+\infty,$$

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f^2(t)dt=0$$

非必要条件：有些不满足绝对可积的信号也存在傅里叶变换。

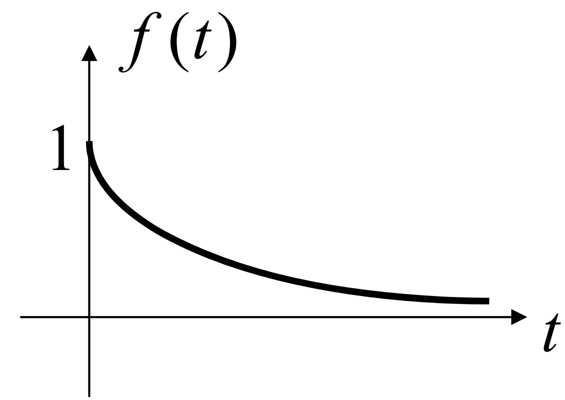
特别的，引入 δ 函数后，可以做傅里叶变换的函数类型大大扩展了。

3.5 典型非周期信号的频谱

典型非周期信号的频谱

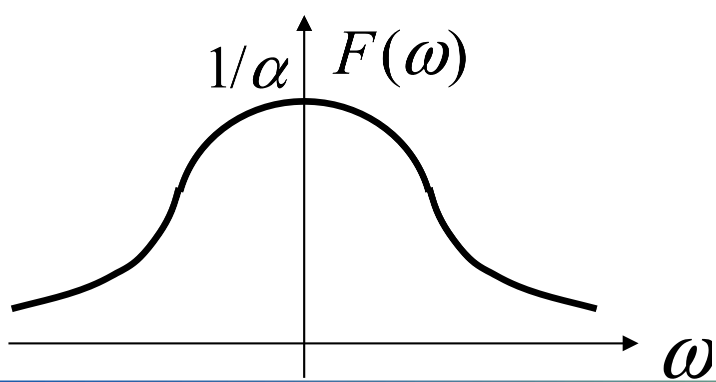
- 单边指数信号

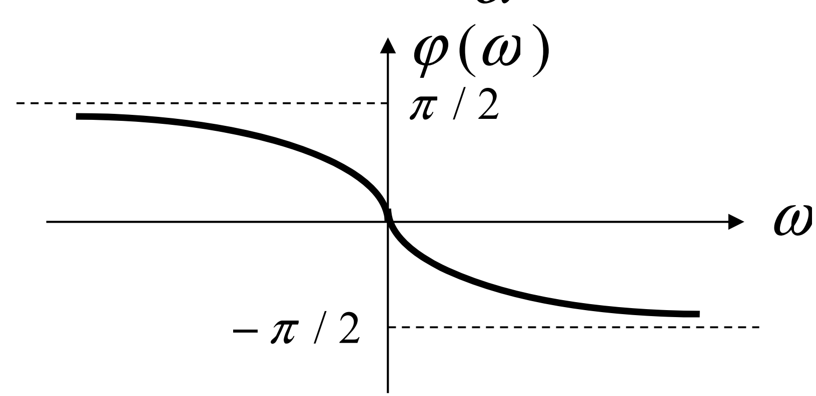
$$f(t)=\begin{cases} e^{-\alpha t} & t\ge 0 \\ 0 & t<0 \end{cases} \qquad (\alpha>0)$$



$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t}e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{\alpha+j\omega}$$

$$|F(\omega)|=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}} \qquad \varphi(\omega)=-\arctan(\frac{\omega}{\alpha})$$



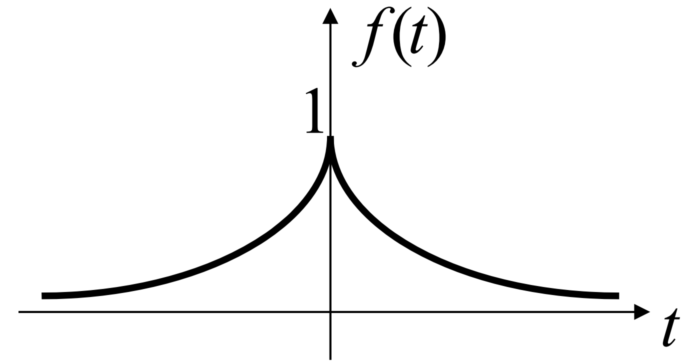


3.5 典型非周期信号的频谱

■ 典型非周期信号的频谱

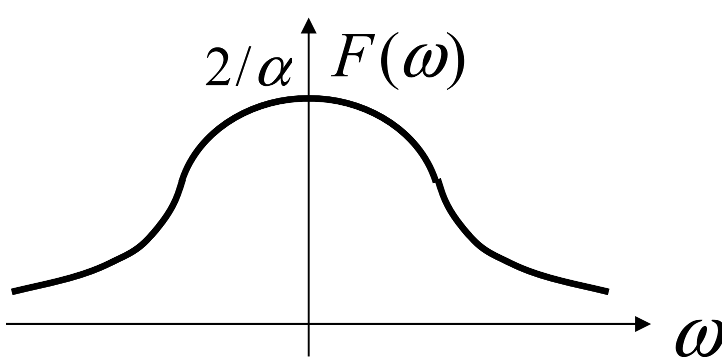
- 双边指数信号

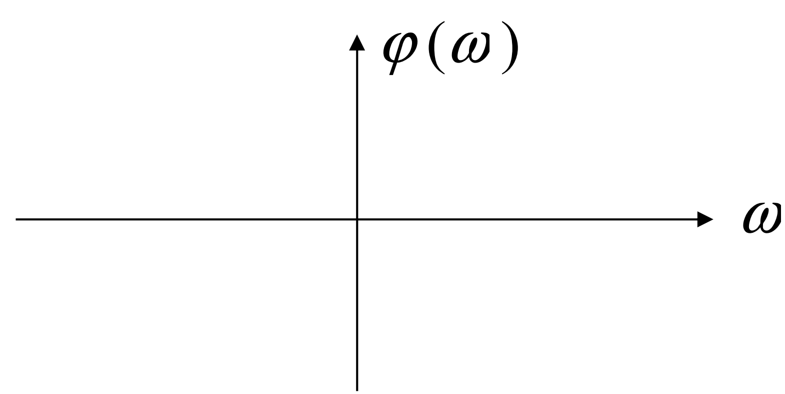
$$f(t)=e^{-\alpha|t|} \qquad (\alpha>0)$$



$$\boxed{F(\omega)=\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}}$$

$$|F(\omega)|=\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2} \qquad \varphi(\omega)=0$$



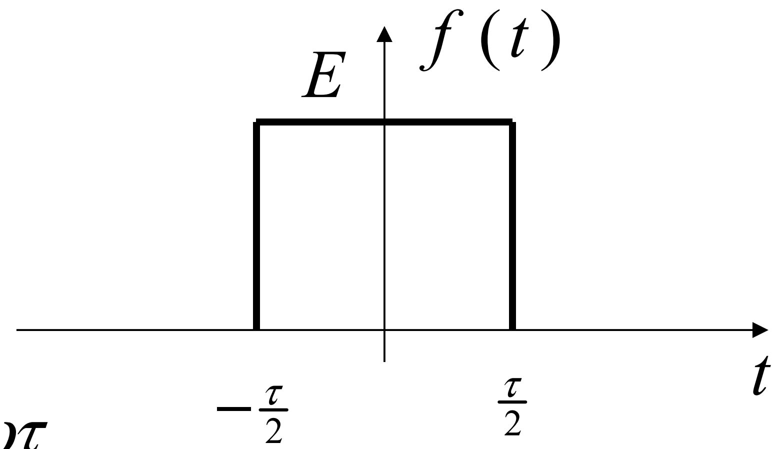


3.5 典型非周期信号的频谱

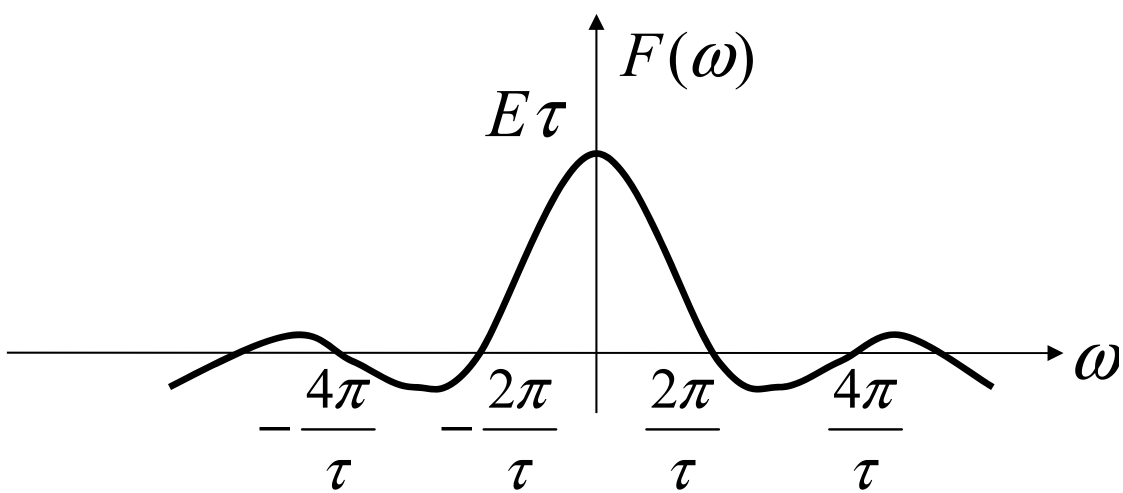
典型非周期信号的频谱

- 对称矩形脉冲信号

$$f(t)=E[u(t+\frac{\tau}{2})-u(t-\frac{\tau}{2})]$$



$$F(\omega)=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} Ee^{-j\omega t}dt=E\tau\mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})$$



典型非周期信号的频谱

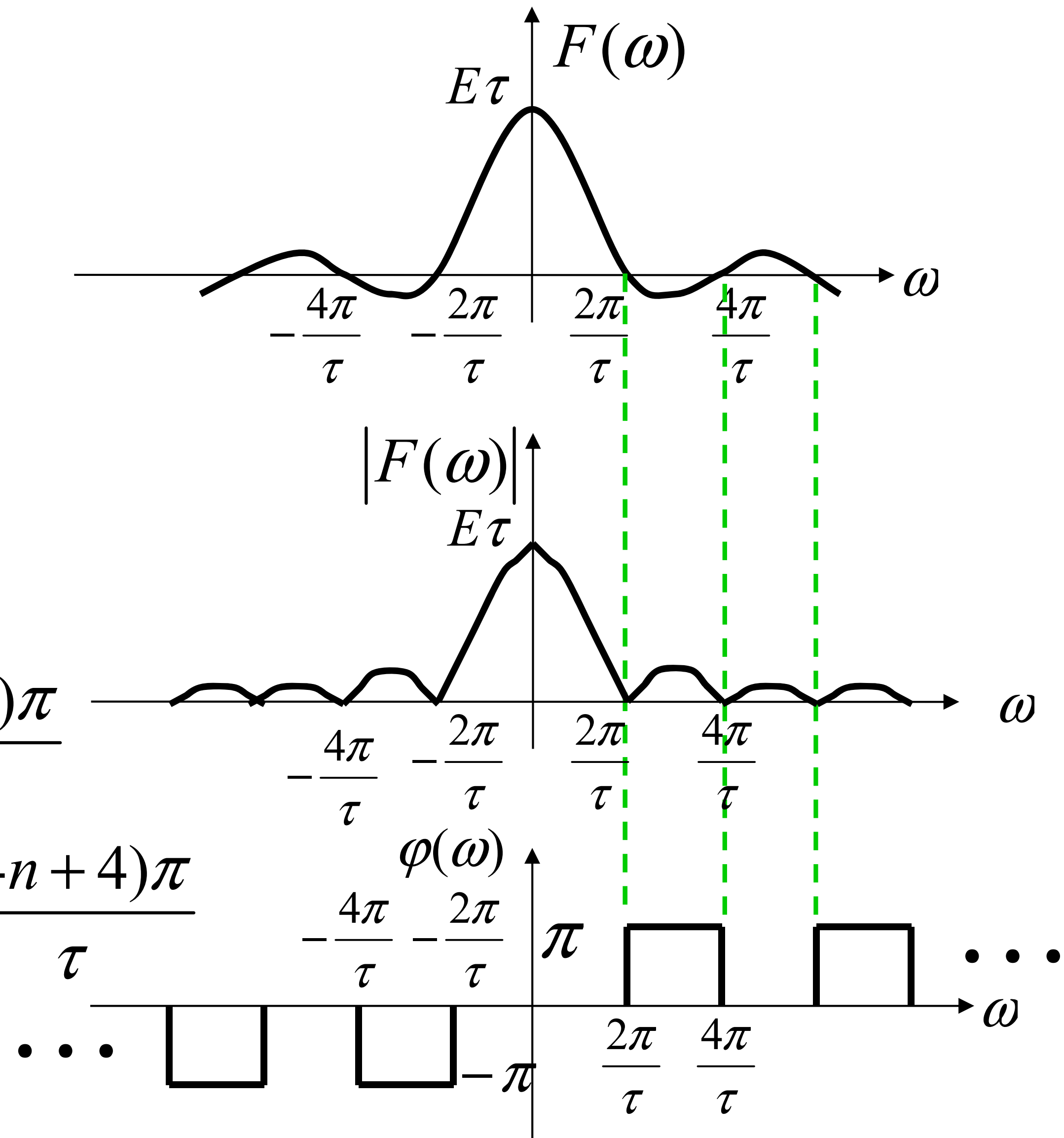
- 对称矩形脉冲信号

$$F(\omega)=E\tau\mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})$$

$$|F(\omega)|=E\tau\left|\mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})\right|$$

$$\varphi(\omega)=\begin{cases}0 & \frac{4n\pi}{\tau}<\omega<\frac{(4n+2)\pi}{\tau}\\ \pi & \frac{(4n+2)\pi}{\tau}<\omega<\frac{(4n+4)\pi}{\tau}\end{cases}$$

$(n=0,1,2,\cdots)$

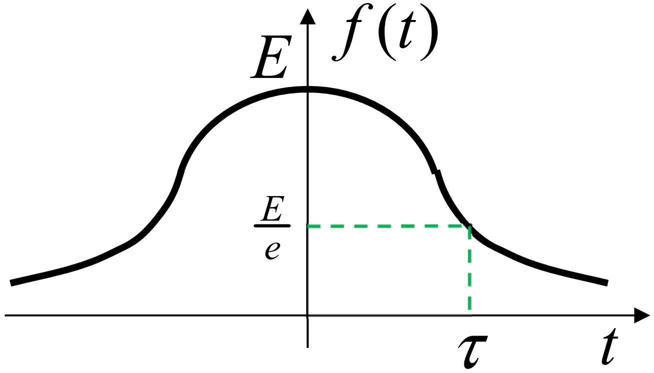


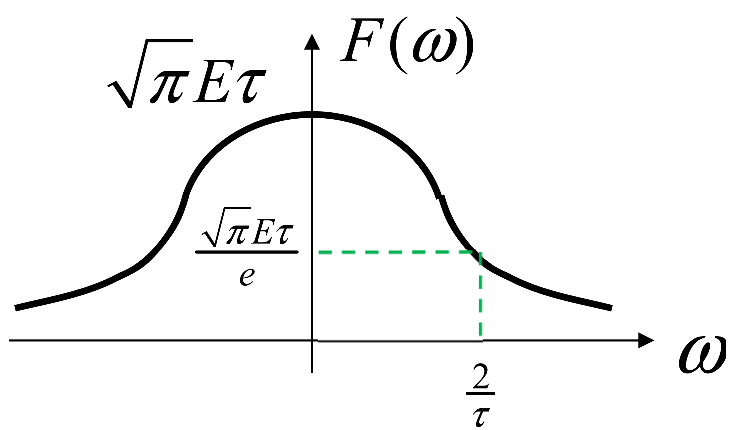
典型非周期信号的频谱

- 钟形脉冲信号（高斯脉冲信号）

$$f(t) = Ee^{-(\frac{t}{\tau})^2}$$

$$F(\omega) = \sqrt{\pi}E\tau e^{-(\frac{\omega\tau}{2})^2}$$



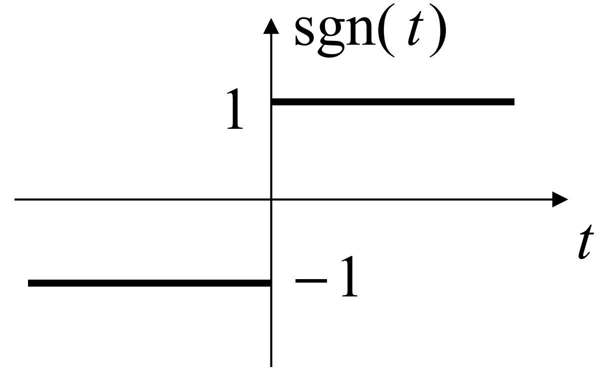


3.5 典型非周期信号的频谱

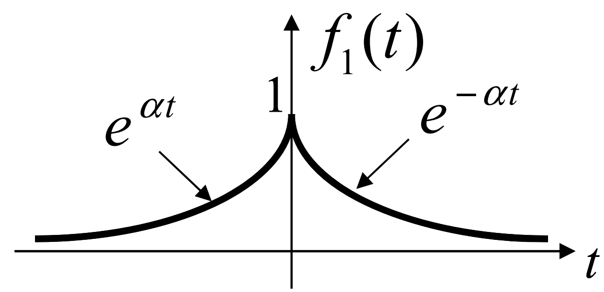
■ 典型非周期信号的频谱

- 符号函数

$$f(t) = \mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$



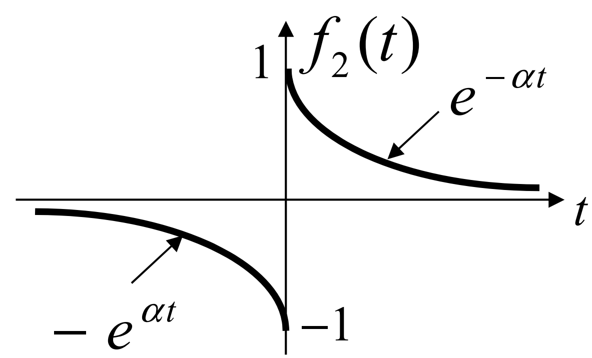
$$f_1(t) = e^{\alpha t}u(-t) + e^{-\alpha t}u(t)$$



$$f_2(t) = f_1(t) \cdot \mathrm{sgn}(t)$$

$$= -e^{\alpha t}u(-t) + e^{-\alpha t}u(t)$$

$$F_2(\omega) = \frac{-2j\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$$



3.5 典型非周期信号的频谱

典型非周期信号的频谱

- 符号函数

$$f_2(t) = f_1(t)\cdot \mathrm{sgn}(t)$$

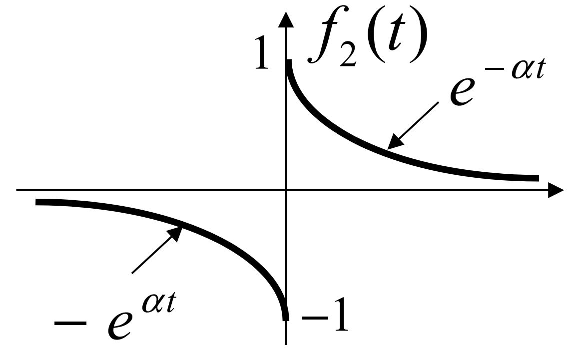
$$= -e^{\alpha t}u(-t) + e^{-\alpha t}u(t)$$

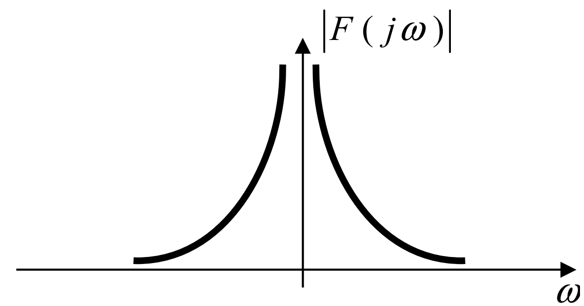
$$F_2(\omega) = \frac{-2j\omega}{\alpha^2+\omega^2}$$

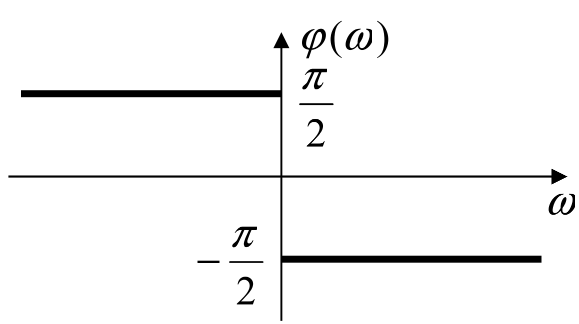
$$f(t) = \mathrm{sgn}(t) = \lim_{\alpha\to 0} f_2(t)$$

$$F(\omega) = \lim_{\alpha\to 0} F_2(\omega) = -\frac{2}{\omega} j$$

$$|F(\omega)| = \frac{2}{|\omega|} \qquad \varphi(\omega) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \omega > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \omega < 0 \end{cases}$$





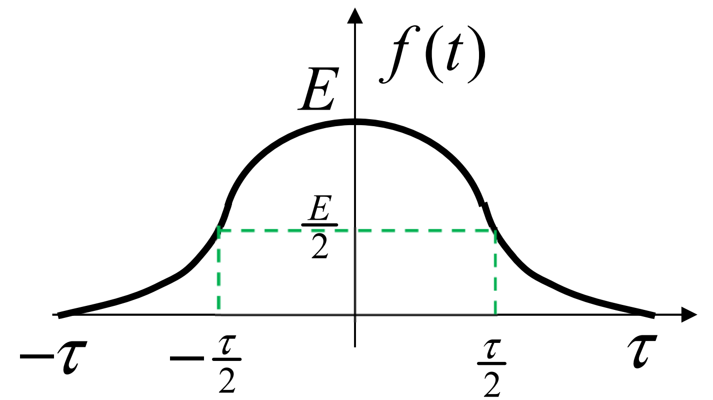


3.5 典型非周期信号的频谱

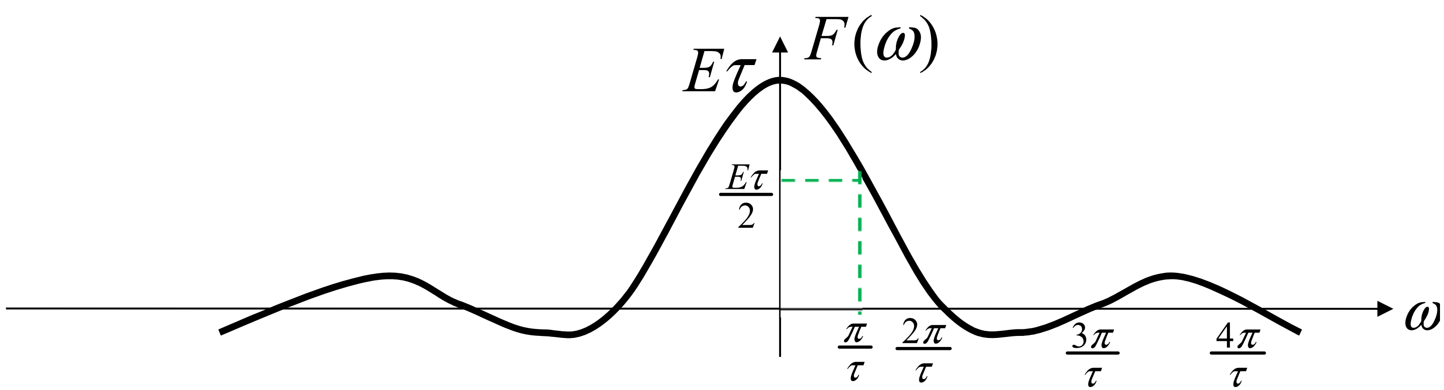
典型非周期信号的频谱

- 升余弦脉冲信号

$$f(t)=\frac{E}{2}[1+\cos(\frac{\pi t}{\tau})],0\le|t|\le\pi$$



$$F(\omega)=\frac{E\tau\mathrm{Sa}(\omega\tau)}{1-(\frac{\omega\tau}{\pi})^2}$$

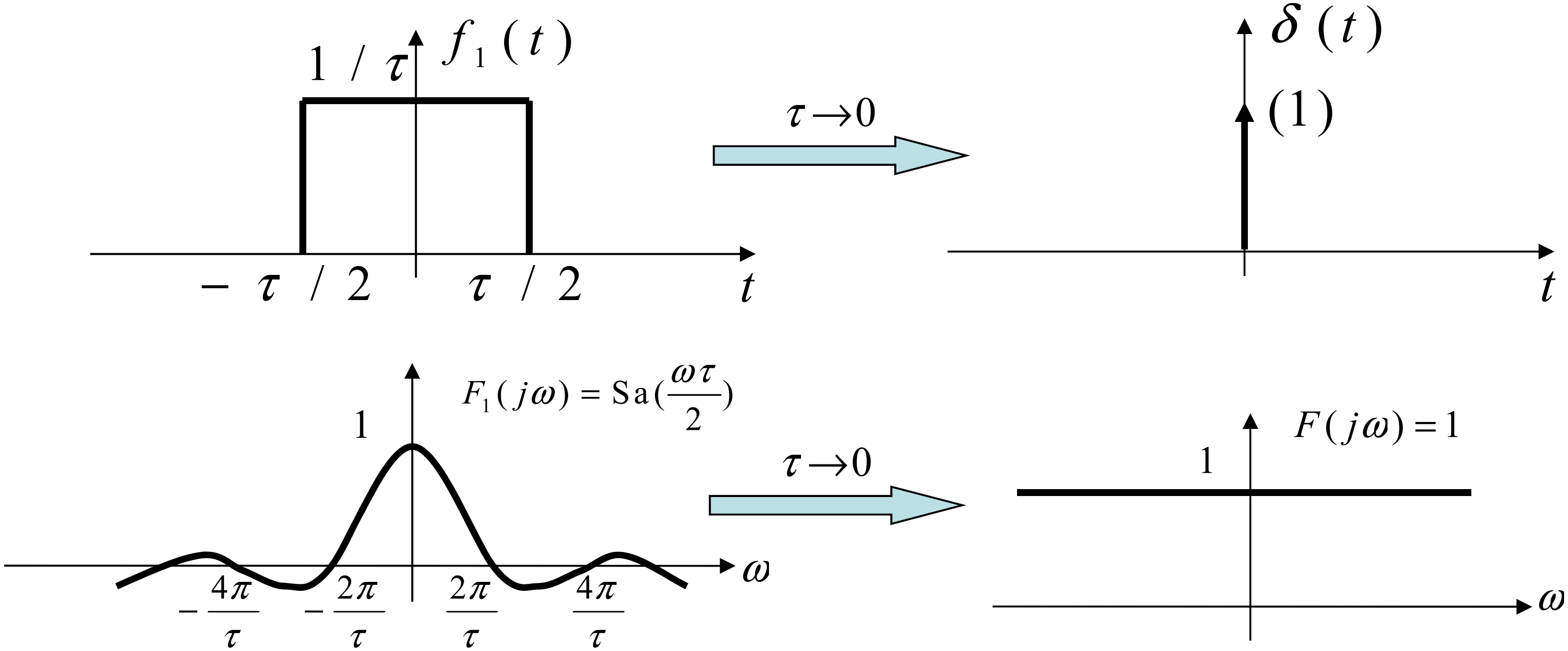


■ 典型非周期信号的频谱

- 冲激信号

$$f(t)=\delta(t) \qquad F(\omega)=1 \qquad \boxed{\mathscr{F}[\delta(t)]=1}$$

单位冲激函数的频谱等于**常数**，也就是说，在整个频率范围内频谱是均匀的。这种频谱常常被叫做“**均匀谱**”或“**白色频谱**”。



3.5 典型非周期信号的频谱

典型非周期信号的频谱

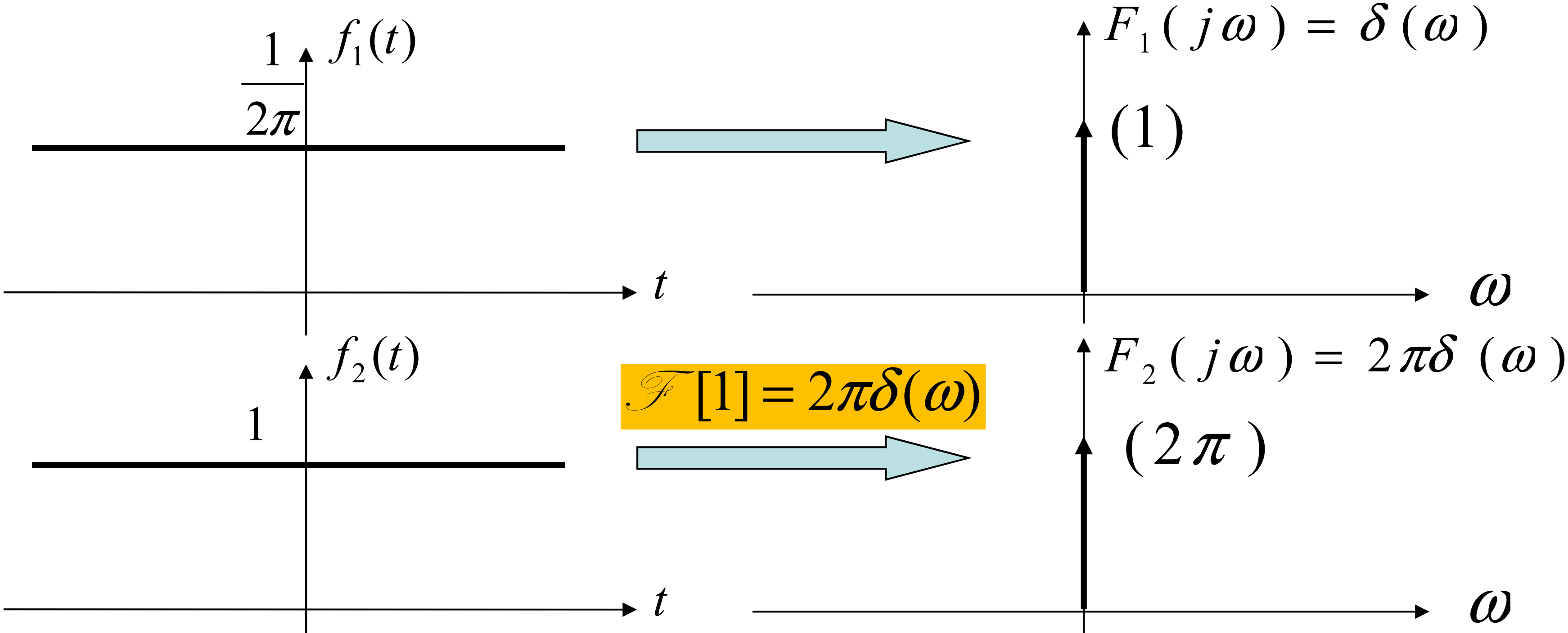
- 冲激信号

$$F(\omega)=\delta(\omega)$$

$$\mathscr{F}[\frac{1}{2\pi}]=\delta(\omega)$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}$$

$$\mathscr{F}^{-1}[\delta(\omega)]=\frac{1}{2\pi}$$

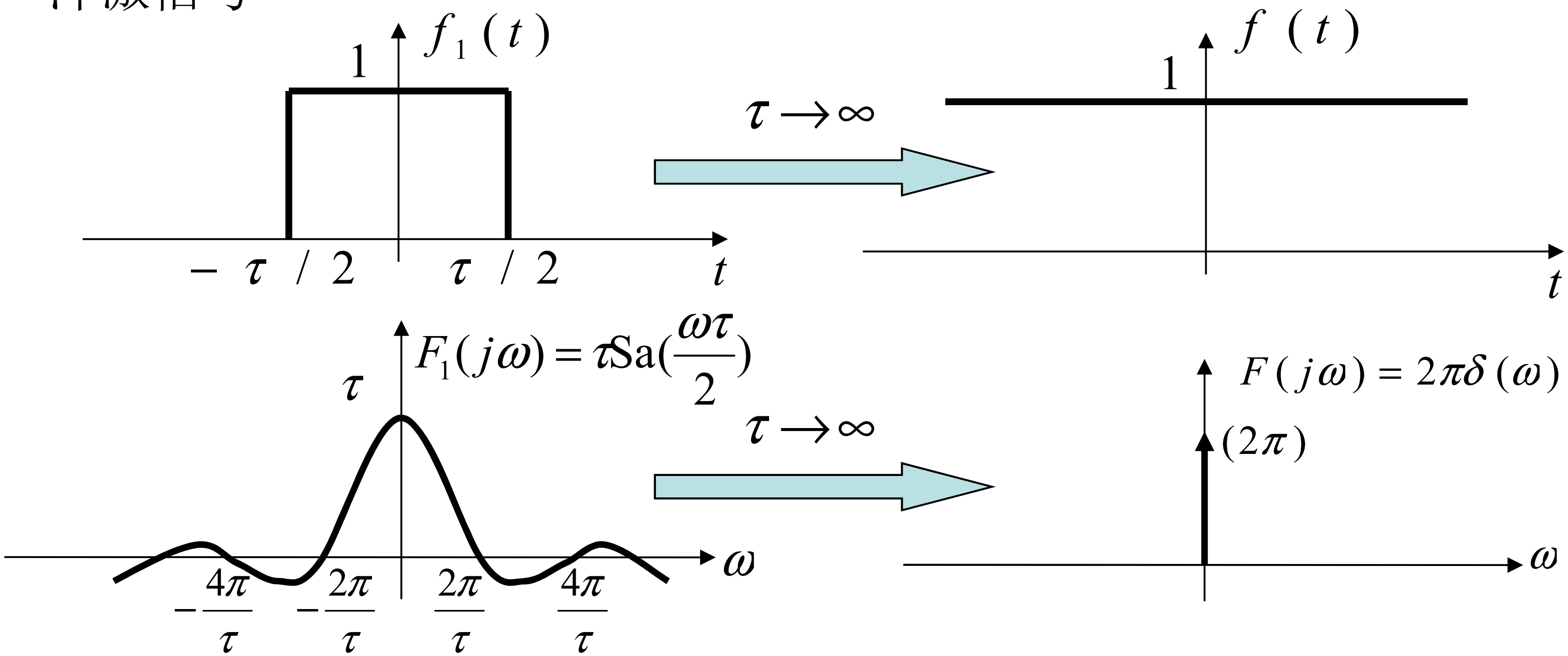


$$\mathscr{F}[1]=2\pi\delta(\omega)$$

3.5 典型非周期信号的频谱

■ 典型非周期信号的频谱

- 冲激信号



$$\because \lim_{\tau\to\infty}[u(t+\frac{\tau}{2})-u(t-\frac{\tau}{2})]=1$$

$$\therefore \mathscr{F}[1]=\lim_{\tau\to\infty}\tau\mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})=\underbrace{\lim_{\tau\to\infty}\frac{\tau}{2\pi}\mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})}_{\delta(\omega)}\cdot 2\pi=2\pi\delta(\omega)$$

3.5 典型非周期信号的频谱

典型非周期信号的频谱

- 冲激偶信号

$$\because \mathscr{F}[\delta(t)]=1, \quad \text{即：} \delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega$$

上式两边对t求导得：

$$\delta'(t)=\frac{d}{dt}\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

$$\therefore \mathscr{F}[\delta'(t)]=j\omega$$

同理：

$$\mathscr{F}[\delta^{(n)}(t)]=(j\omega)^n$$

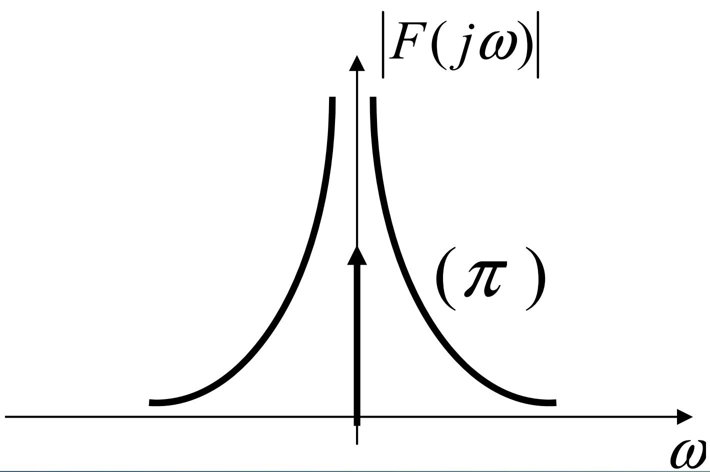
典型非周期信号的频谱

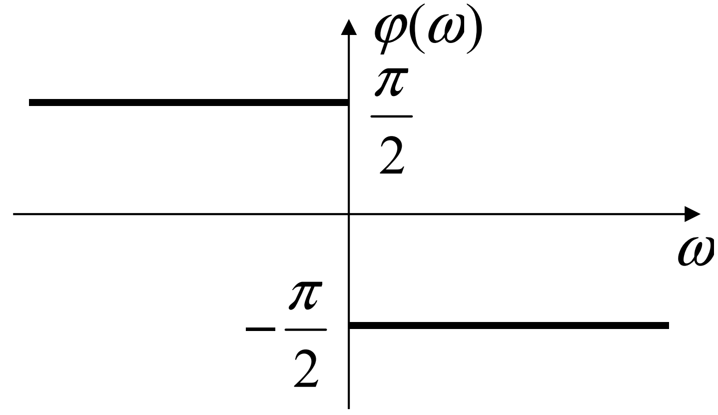
- 阶跃信号

$$\because u(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)$$

$$\therefore F(\omega)=\mathscr{F}[u(t)]=\mathscr{F}[\frac{1}{2}]+\mathscr{F}[\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)]$$

$$=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$$





傅里叶变换的基本性质

- 线性

若 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega), f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$

则 $a \cdot f_1(t) + b \cdot f_2(t) \leftrightarrow a \cdot F_1(\omega) + b \cdot F_2(\omega)$

傅里叶变换的基本性质

- 时移特性

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

则 $f(t-t_0) \leftrightarrow F(\omega)e^{-j\omega t_0}$

证明：

$$\because f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$\therefore f(t-t_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega(t-t_0)}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [F(\omega)e^{-j\omega t_0}]e^{j\omega t}d\omega$$

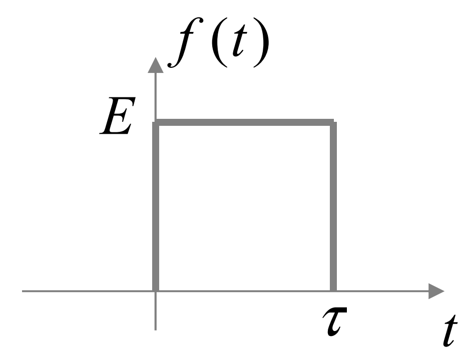
$$\therefore f(t-t_0) \leftrightarrow F(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

同理： $f(t+t_0) \leftrightarrow F(\omega)e^{j\omega t_0}$

傅里叶变换的基本性质

- 时移特性

例：求右图所示的单边矩形脉冲信号的频谱函数。



解：

因为对称矩形脉冲信号$Eg_\tau(t)$的傅里叶变换为

$$\mathscr{F}[Eg_\tau(t)] = E\tau\,\mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})$$

根据傅里叶变换的时移特性

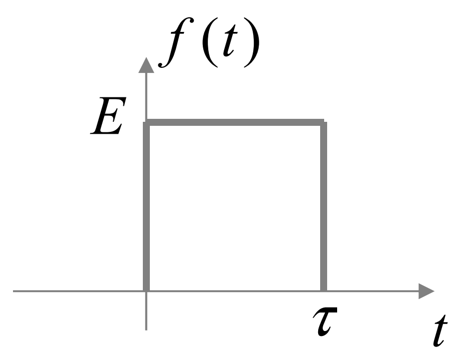
$$\mathscr{F}[f(t)] = \mathscr{F}[Eg_\tau(t-\tfrac{\tau}{2})] = \mathscr{F}[Eg_\tau(t)]e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}$$

$$= E\tau\,\mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}$$

■ 傅里叶变换的基本性质

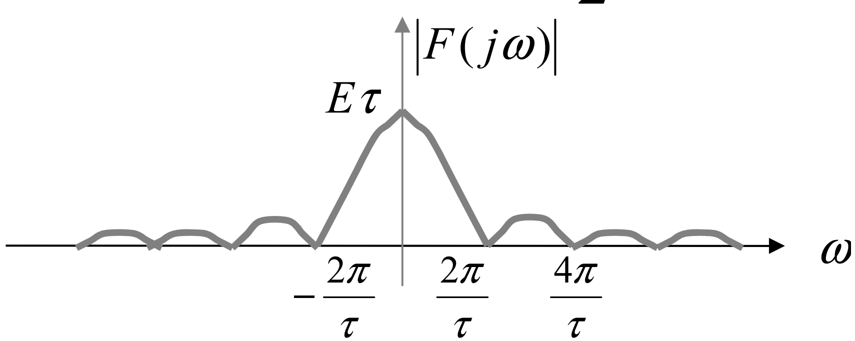
- 时移特性

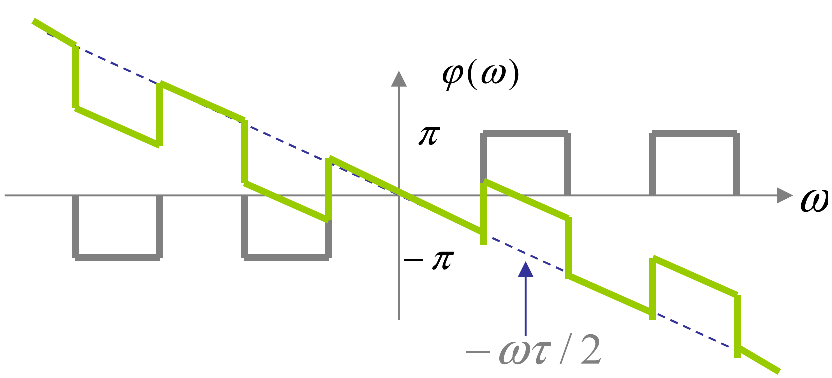
例：求右图所示的单边矩形脉冲信号的频谱函数。



解：

$$\mathscr{F}[f(t)] = E\tau\,\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}$$





傅里叶变换的基本性质

- 频移特性(调制定理)

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

则 $f(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow F(\omega - \omega_0)$

证明：

$$\because \mathscr{F}[f(t)e^{j\omega_0 t}] = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)e^{j\omega_0 t}]e^{-j\omega t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt$$

$$= F(\omega - \omega_0)$$

$$\therefore f(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow F(\omega - \omega_0)$$

同理： $f(t)e^{-j\omega_0 t} \leftrightarrow F(\omega + \omega_0)$

傅里叶变换的基本性质

- 频移特性(调制定理)

$$f(t)\cos\omega_0 t \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{2}[F(\omega+\omega_0)+F(\omega-\omega_0)]$$

$$f(t)\sin\omega_0 t \quad \leftrightarrow \quad \frac{j}{2}[F(\omega+\omega_0)-F(\omega-\omega_0)]$$

例：求 $e^{j\omega_1 t},\cos\omega_1 t,\sin\omega_1 t$ 的频谱。

解：

$$\mathscr{F}[e^{j\omega_1 t}]=2\pi\delta(\omega-\omega_1)$$

$$\mathscr{F}[\cos\omega_1 t]=\mathscr{F}[\frac{e^{j\omega_1 t}+e^{-j\omega_1 t}}{2}]=\pi[\delta(\omega-\omega_1)+\delta(\omega+\omega_1)]$$

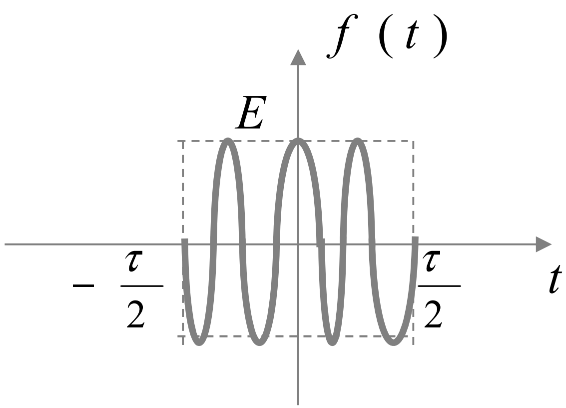
$$\mathscr{F}[\sin\omega_1 t]=\mathscr{F}[\frac{e^{j\omega_1 t}-e^{-j\omega_1 t}}{2j}]=j\pi[\delta(\omega+\omega_1)-\delta(\omega-\omega_1)]$$

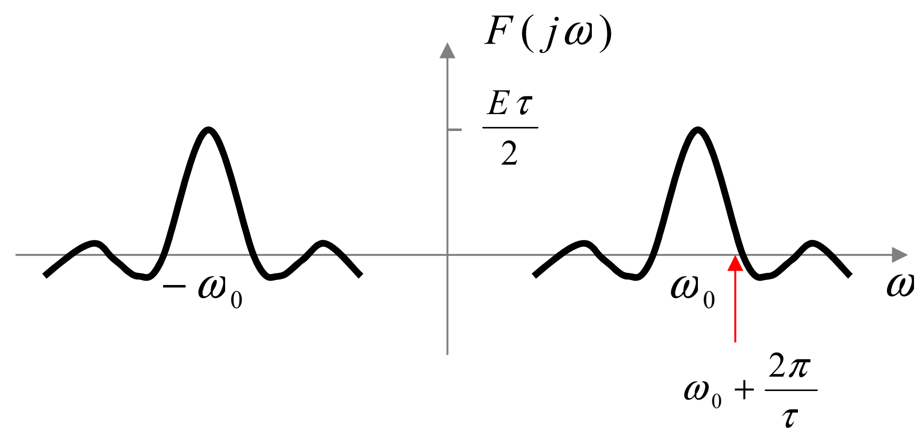
3.4 傅里叶变换的基本性质

■ 傅里叶变换的基本性质

- 频移特性(调制定理)

例：求矩形调幅信号$f(t)$的频谱函数，已知 $f(t)=g(t)\cos\omega_0 t$，其中$g(t)$为对称矩形脉冲，脉幅为E，脉宽为τ。





解： $\because g(t)\leftrightarrow G(\omega)=E\tau\mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})$

$$\therefore f(t)\leftrightarrow F(\omega)=\frac{1}{2}[G(\omega+\omega_0)+G(\omega-\omega_0)]$$

$$=\frac{E\tau}{2}\{\mathrm{Sa}[(\omega+\omega_0)\frac{\tau}{2}]+\mathrm{Sa}[(\omega-\omega_0)\frac{\tau}{2}]\}$$

3.4 傅里叶变换的基本性质

傅里叶变换的基本性质

- 尺度变换特性

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

则 $f(at) \leftrightarrow \dfrac{1}{|a|} F(\dfrac{\omega}{a})$

证明：

$$\because \mathscr{F}[f(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt$$

$\boxed{\begin{matrix} at = \tau \\ a > 0 \end{matrix}}$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega \frac{\tau}{a}} \tfrac{1}{a} d\tau$$

$$= \tfrac{1}{a} F(\tfrac{\omega}{a})$$

$\boxed{\begin{matrix} at = \tau \\ a < 0 \end{matrix}}$

$$= \int_{\infty}^{-\infty} f(\tau) e^{-j\omega \frac{\tau}{a}} \tfrac{1}{a} d\tau$$

$$= -\tfrac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\frac{\omega}{a}\tau} d\tau$$

$$= -\tfrac{1}{a} F(\tfrac{\omega}{a})$$

综上：$f(at) \leftrightarrow \dfrac{1}{|a|} F(\dfrac{\omega}{a})$　　　$f(-t) \leftrightarrow F(-\omega)$

傅里叶变换的基本性质

- 尺度变换特性

综合时移特性和尺度变换特性，有以下两式成立：

$$f(at-t_0)=\frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})e^{-j\frac{\omega t_0}{a}}$$

$$f(t_0-at)=\frac{1}{|a|}F(-\frac{\omega}{a})e^{-j\frac{\omega t_0}{a}}$$

3.4 傅里叶变换的基本性质

傅里叶变换的基本性质

- 奇偶虚实性

$$F(\omega)=R(\omega)+jX(\omega)$$

$$\begin{cases}\varphi(\omega)=\arctan(\dfrac{X(\omega)}{R(\omega)}) \\ \left|F(\omega)\right|=\sqrt{R^2(\omega)+X^2(\omega)}\end{cases}$$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)[\cos\omega t-j\sin\omega t]dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\omega tdt-j\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\omega tdt$$

$$R(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\omega tdt$$

$$X(\omega)=-\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\omega tdt$$

结论1：当 $f(t)$ 是实函数时，$R(\omega)$ 是偶函数，$X(\omega)$是奇函数。

特别的，

当 $f(t)$是实偶函数时，则 $X(\omega)=0$

当 $f(t)$是实奇函数时，则 $R(\omega)=0$

3.4 傅里叶变换的基本性质

■ 傅里叶变换的基本性质

- 奇偶虚实性

$$F(\omega)=R(\omega)+jX(\omega)$$

$$\begin{cases}\varphi(\omega)=\arctan(\dfrac{X(\omega)}{R(\omega)})\\ \left|F(\omega)\right|=\sqrt{R^2(\omega)+X^2(\omega)}\end{cases}$$

$$f(t)=jg(t)$$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}jg(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}jg(t)[\cos\omega t-j\sin\omega t]dt$$

$$=j\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\cos\omega t dt+\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\sin\omega t dt$$

$$R(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\sin\omega t dt$$

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\cos\omega t dt$$

结论2：当 $f(t)$ 是虚函数时，$R(\omega)$ 是奇函数，$X(\omega)$是偶函数。

特别的，

当 $f(t)$是虚偶函数时，则 $R(\omega)=0$

当 $f(t)$是虚奇函数时，则 $X(\omega)=0$

傅里叶变换的基本性质

- 对称性

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

则 $F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

证明：$\because f(t) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$

$\boxed{t \to -t}$ $\therefore f(-t) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-j\omega t}d\omega$

$\boxed{t \leftrightarrow \omega}$ $\therefore 2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-j\omega t}dt$

$\therefore F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

3.4 傅里叶变换的基本性质

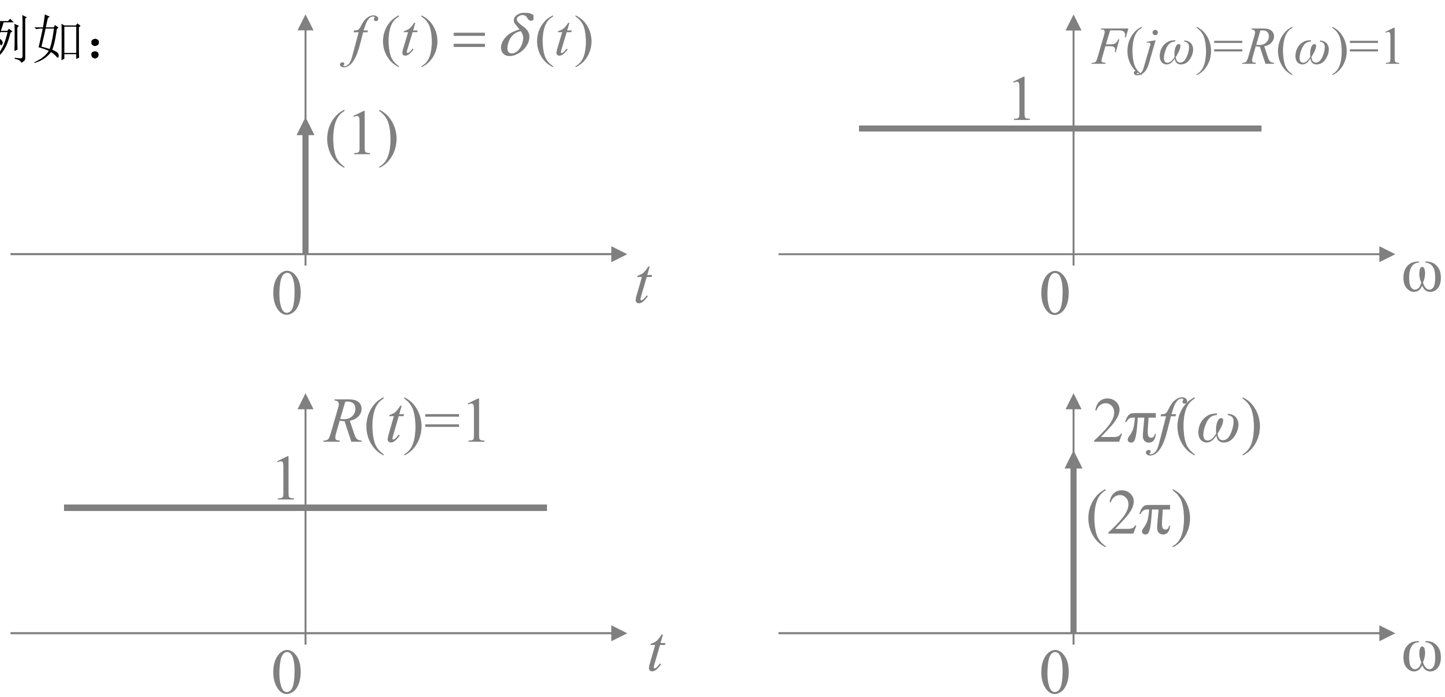
傅里叶变换的基本性质

- 对称性

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$，且 $f(t)$ 为实偶函数，

则 $F(\omega) = R(\omega) = R(-\omega)$， $R(t) \leftrightarrow 2\pi f(\omega)$

例如：



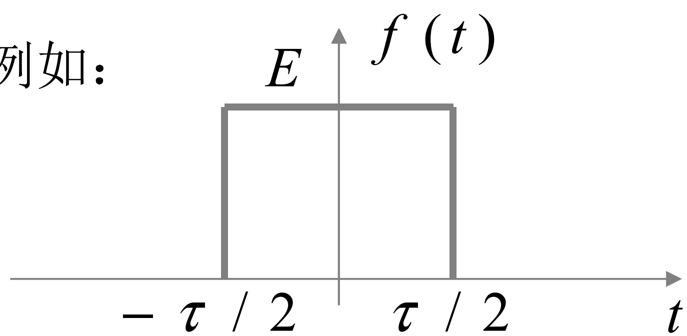
■ 傅里叶变换的基本性质

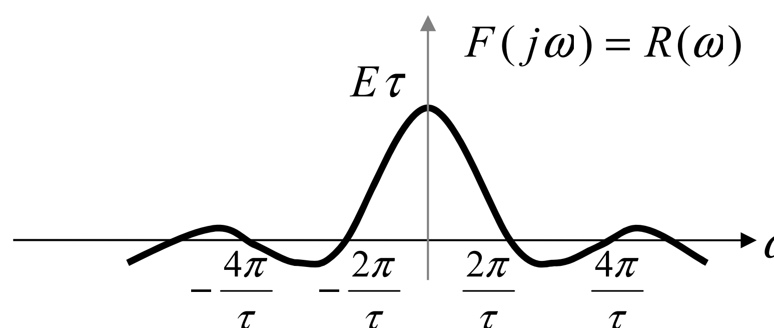
- 对称性

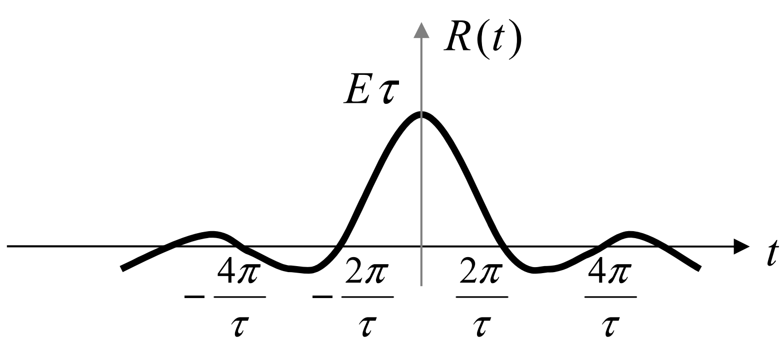
若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$，且 $f(t)$ 为实偶函数，

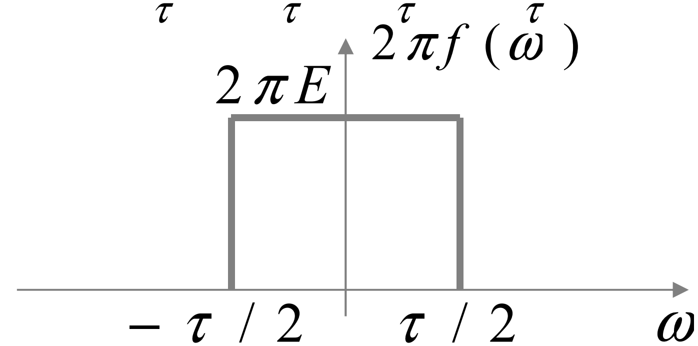
则 $F(\omega) = R(\omega) = R(-\omega) \qquad R(t) \leftrightarrow 2\pi f(\omega)$

例如：









傅里叶变换的基本性质

- 对称性

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$，且 $f(t)$ 为实奇函数，

则 $F(\omega) = jX(\omega) = -jX(-\omega)$，$X(t) \leftrightarrow -j2\pi f(-\omega) = j2\pi f(\omega)$

例如：

由 $\operatorname{sgn}(t) \leftrightarrow \dfrac{2}{j\omega}$，可得

$$\frac{1}{t} \leftrightarrow \quad j\pi \operatorname{sgn}(-\omega) = -j\pi \operatorname{sgn}(\omega)$$

傅里叶变换的基本性质

- 对称性

利用傅里叶变换的对称性，可以将求傅里叶逆变换的问题，转化为求傅里叶变换来进行。

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

则 $F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

即 $f(t) = \dfrac{1}{2\pi} \mathscr{F}[F(t)]\Big|_{\omega=-t}$

傅里叶变换的基本性质

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$$

$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\mathscr{F}[F(t)]\Big|_{\omega=-t}$$

- 对称性

例：求 $j\pi\,\mathrm{sgn}(\omega)$ 的逆变换。

解：

$$\because F(t) = j\pi\,\mathrm{sgn}(t)$$

$$\therefore \mathscr{F}^{-1}[j\pi\,\mathrm{sgn}(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\mathscr{F}[F(t)]\Big|_{\omega=-t}$$

$$= \frac{1}{2\pi}[\frac{2\pi}{\omega}]\Big|_{\omega=-t}$$

$$= -\frac{1}{t}$$

■ 傅里叶变换的基本性质

- 对称性

例：求 $F(\omega)$ 的逆变换。 $F(\omega)=\begin{cases}2\pi A & |\omega|<\dfrac{\tau}{2}\\[2ex] 0 & |\omega|>\dfrac{\tau}{2}\end{cases}$

解：

$$F(t)=\begin{cases}2\pi A & |t|<\dfrac{\tau}{2}\\[2ex] 0 & |t|>\dfrac{\tau}{2}\end{cases}$$

$$f(t)\leftrightarrow F(\omega)$$

$$F(t)\leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\mathscr{F}[F(t)]\Big|_{\omega=-t}$$

$$\mathscr{F}[F(t)]=2\pi A\tau\,\mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\mathscr{F}[F(t)]\Big|_{\omega=-t}=\frac{1}{2\pi}[2\pi A\tau\,\mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})]\Big|_{\omega=-t}$$

$$=A\tau\,\mathrm{Sa}(\frac{t\tau}{2})$$

傅里叶变换的基本性质

- 卷积特性

(1) 时域卷积定理

若 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega), f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$

则 $f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$

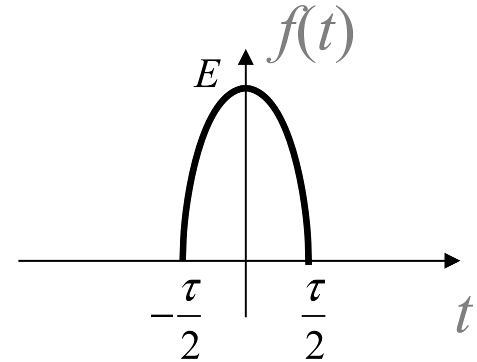
(2) 频域卷积定理

若 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega), f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$

则 $f_1(t) \cdot f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$

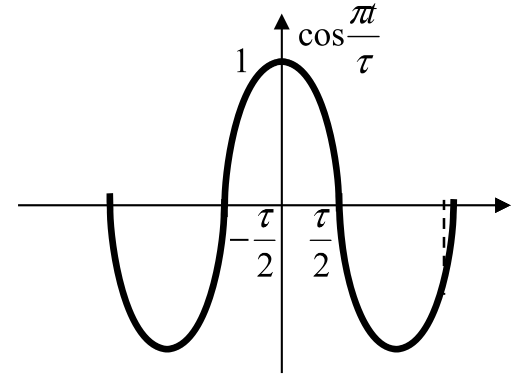
例： 利用频域卷积定理求余弦脉冲的频谱。

$$f(t)=\begin{cases} E\cos\dfrac{\pi t}{\tau} & |t|\le\dfrac{\tau}{2} \\ 0 & |t|>\dfrac{\tau}{2}\end{cases}$$



解：

$f(t)$看作是矩形脉冲$G(t)$与余弦函数的乘积。

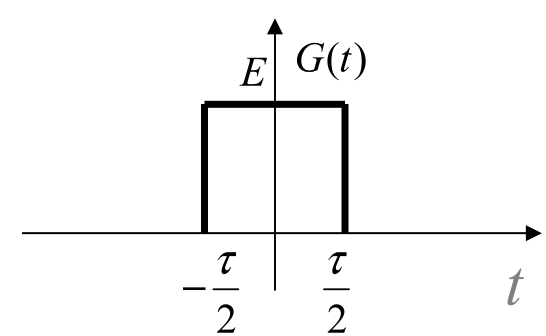


$$G(j\omega)=E\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

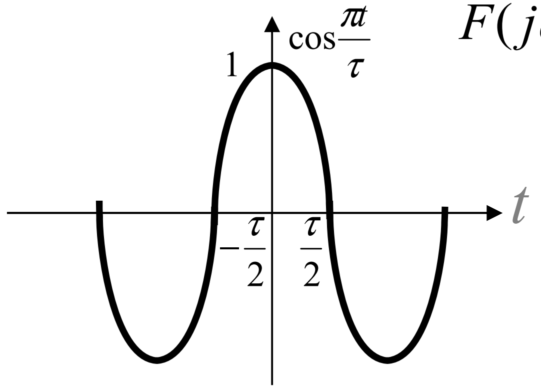
$$\mathcal{F}\left[\cos\frac{\pi t}{\tau}\right]=\pi\delta\left(\omega+\frac{\pi}{\tau}\right)+\pi\delta\left(\omega-\frac{\pi}{\tau}\right)$$

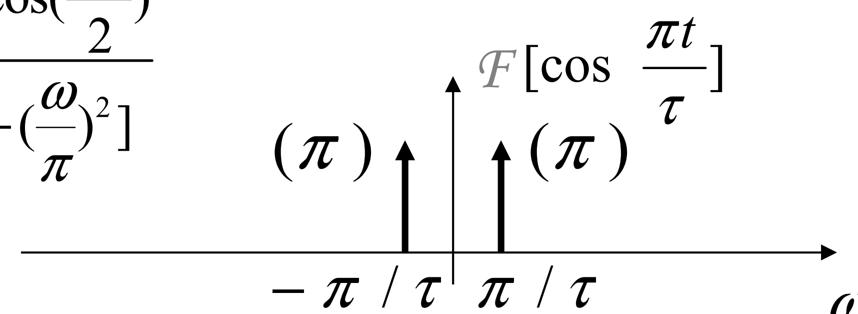
$$F(j\omega)=\frac{1}{2\pi}G(j\omega)*\pi\left[\delta\left(\omega+\frac{\pi}{\tau}\right)+\delta\left(\omega-\frac{\pi}{\tau}\right)\right]$$

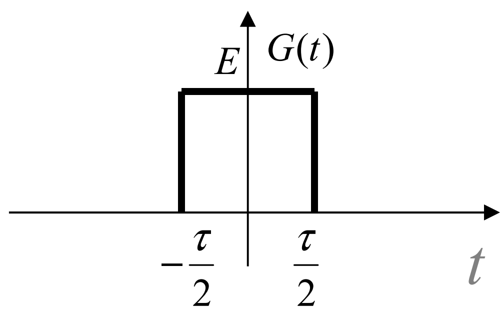
$$=\frac{E\tau}{2}\left\{\mathrm{Sa}\left[\left(\omega+\frac{\pi}{\tau}\right)\frac{\tau}{2}\right]+\mathrm{Sa}\left[\left(\omega-\frac{\pi}{\tau}\right)\frac{\tau}{2}\right]\right\}$$

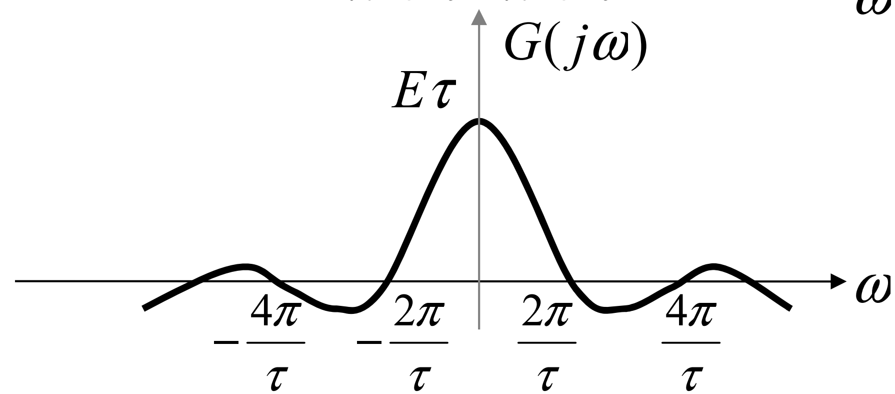


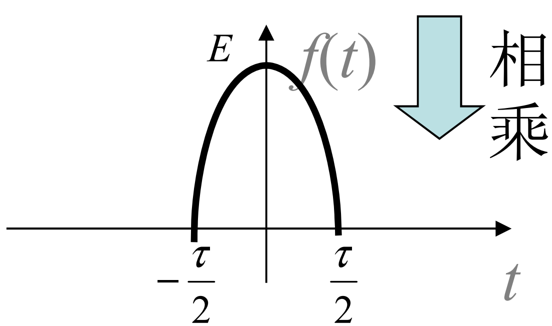
$$F(j\omega)=\frac{2E\tau\cos(\frac{\omega\tau}{2})}{\pi[1-(\frac{\omega}{\pi})^2]}$$

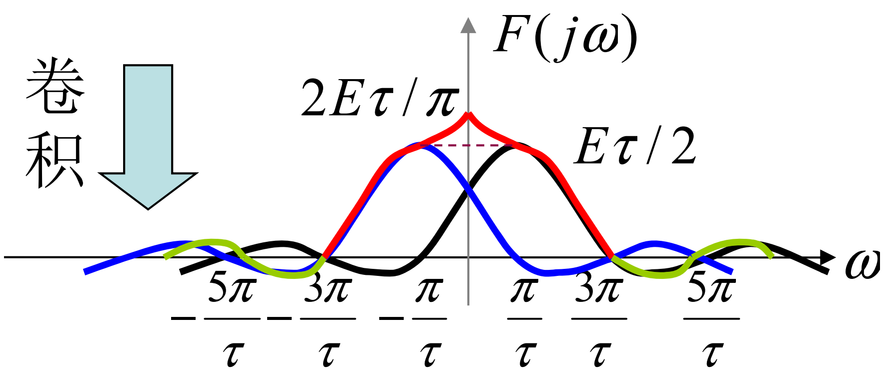












3.4 傅里叶变换的基本性质

傅里叶变换的基本性质

- 微分与积分（时域微分）

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

则 $\dfrac{df(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega F(\omega)$

证明：

$$\because f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$\therefore \frac{df(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} j\omega F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$\therefore \frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega F(\omega)$$

同理： $f^{(n)}(t) \leftrightarrow (j\omega)^n F(\omega)$

傅里叶变换的基本性质

- 微分与积分（时域积分）

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

则 $\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \leftrightarrow \dfrac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$

证明：

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau] &= \int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau]e^{-j\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)u(t-\tau)d\tau]e^{-j\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau)e^{-j\omega t}dt]f(\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}[(\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega})e^{-j\omega\tau}]f(\tau)d\tau \\
&= [\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}]\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau}
\end{aligned}
$$

$\boxed{F(\omega)}$

傅里叶变换的基本性质

- 微分与积分（时域积分）

若 $\varphi'(t)=f(t), f(t)\leftrightarrow F(\omega)$,

则 $$\Phi(\omega)=\mathscr{F}[\varphi(t)]=\frac{F(\omega)}{j\omega}+[\varphi(\infty)+\varphi(-\infty)]\pi\delta(\omega)$$

证明：$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{F(\omega)}{j\omega}+\pi F(0)\delta(\omega)$$

$$\varphi(t)-\varphi(-\infty)\leftrightarrow \frac{F(\omega)}{j\omega}+\pi F(0)\delta(\omega)$$

$$\varphi(t)\leftrightarrow \frac{F(\omega)}{j\omega}+\pi F(0)\delta(\omega)+\varphi(-\infty)2\pi\delta(\omega)$$

$$=\frac{F(\omega)}{j\omega}+[\varphi(\infty)+\varphi(-\infty)]\pi\delta(\omega)$$

$$F(0)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt=\varphi(\infty)-\varphi(-\infty)$$

傅里叶变换的基本性质

- 微分与积分（时域积分）

$$\varphi(t) \leftrightarrow \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega) + \varphi(-\infty)2\pi\delta(\omega)$$

$$= \frac{F(\omega)}{j\omega} + [\varphi(\infty) + \varphi(-\infty)]\pi\delta(\omega)$$

1. 当 $\varphi(-\infty) = 0, \varphi(\infty) \neq 0$ 时，有

$$\Phi(\omega) = \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$$

2. 当 $\varphi(-\infty) = 0, \varphi(\infty) = 0$ 时，有

$$\Phi(\omega) = \frac{F(\omega)}{j\omega}$$

3.4 傅里叶变换的基本性质

■ 傅里叶变换的基本性质

- 微分与积分（时域积分）

$$\Phi(\omega)=\frac{F(\omega)}{j\omega}+[\varphi(\infty)+\varphi(-\infty)]\pi\delta(\omega)$$

例：利用积分特性分别求 $\varphi_1(t)=u(t),\varphi_2(t)=\frac{1}{2}\text{sgn}(t)$ 的傅里叶变换。

解： $f_1(t)=\varphi_1{}'(t)=\delta(t),f_2(t)=\varphi_2{}'(t)=\delta(t)$

$$\therefore F_1(\omega)=F_2(\omega)=1$$

$$\because \varphi_1(-\infty)=0,\varphi_1(\infty)=1,\varphi_2(-\infty)=-\tfrac{1}{2},\varphi_2(\infty)=\tfrac{1}{2}$$

$$\therefore \Phi_1(\omega)=\frac{F_1(\omega)}{j\omega}+[\varphi_1(\infty)+\varphi_1(-\infty)]\pi\delta(\omega)=\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$$

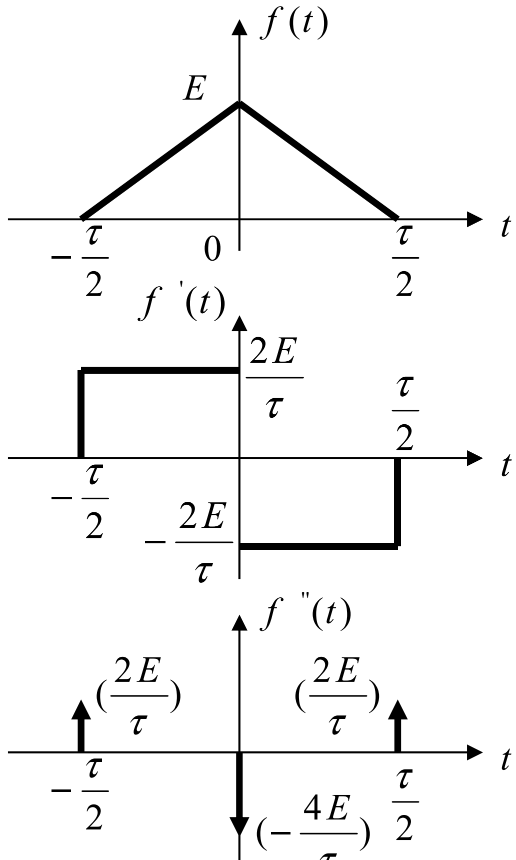
$$\Phi_2(\omega)=\frac{F_2(\omega)}{j\omega}+[\varphi_2(\infty)+\varphi_2(-\infty)]\pi\delta(\omega)=\frac{1}{j\omega}$$

3.4 傅里叶变换的基本性质

■ 傅里叶变换的基本性质

- 微分与积分（时域积分）

例：求如图所示三角脉冲信号的傅里叶变换。



解：

$$f'(t)=\begin{cases}\dfrac{2E}{\tau} & -\dfrac{\tau}{2}<t<0\\ -\dfrac{2E}{\tau} & 0<t<\dfrac{\tau}{2}\\ 0 & |t|>\dfrac{\tau}{2}\end{cases}$$

$$f''(t)=\frac{2E}{\tau}[\delta(t+\frac{\tau}{2})+\delta(t-\frac{\tau}{2})-2\delta(t)]$$

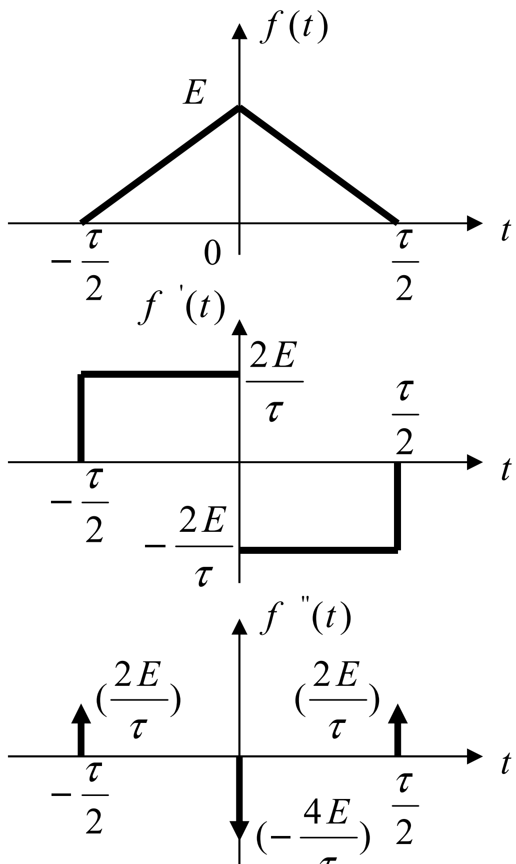
$$(j\omega)^2F(\omega)=\frac{2E}{\tau}(e^{j\omega\frac{\tau}{2}}+e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}-2)$$

$$=-\frac{\omega^2E\tau}{2}\mathrm{Sa}^2(\frac{\omega\tau}{4})$$

■ 傅里叶变换的基本性质

- 微分与积分（时域积分）

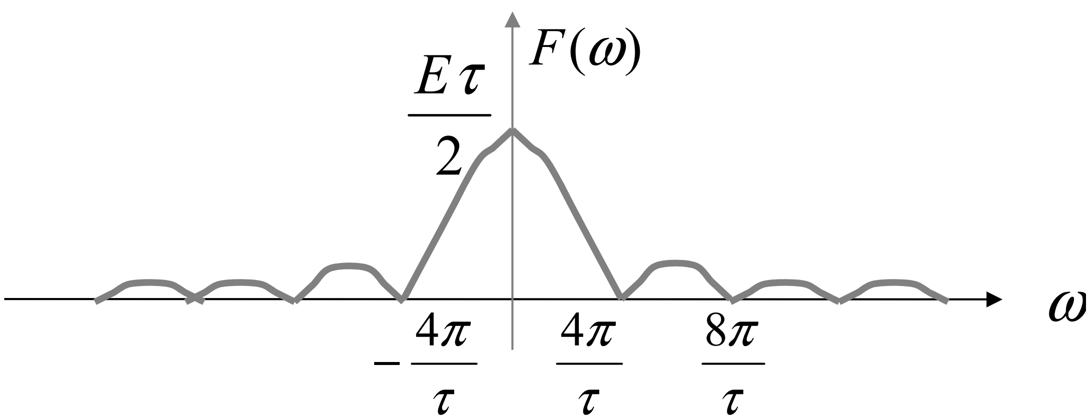
例：求如图所示三角脉冲信号的傅里叶变换。



解：

$$(j\omega)^2 F(\omega) = -\frac{\omega^2 E\tau}{2}\mathrm{Sa}^2(\frac{\omega\tau}{4})$$

$$\therefore F(\omega) = \frac{E\tau}{2}\mathrm{Sa}^2(\frac{\omega\tau}{4})$$

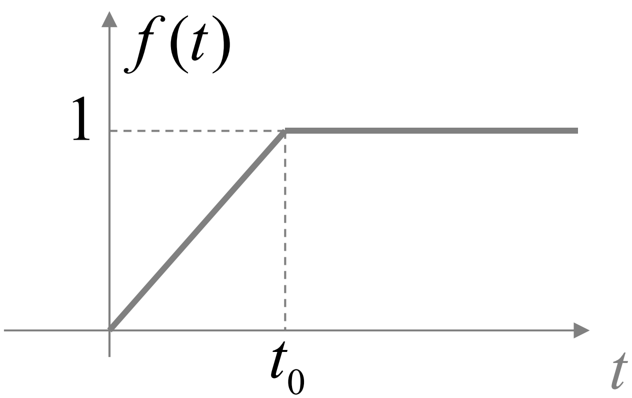


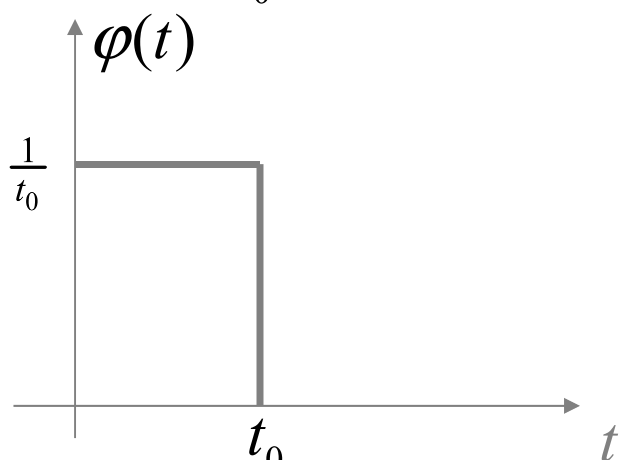
■ 傅里叶变换的基本性质

- 微分与积分（时域积分）

例：求如图所示截平斜变信号的傅里叶变换。

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \dfrac{t}{t_0}, & 0\le t\le t_0\\ 1, & t>t_0\end{cases}$$





解：

$$\varphi(t)=f'(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{t_0} & 0\le t\le t_0\\ 0 & t<0,\, t>t_0\end{cases}$$

$$\Phi(\omega)=\mathrm{Sa}\,(\frac{\omega t_0}{2})\,\mathrm{e}^{-j\omega\frac{t_0}{2}}$$

$$F(\omega)=\frac{\Phi(\omega)}{j\omega}+[f(\infty)+f(-\infty)]\pi\delta(\omega)$$

$$=\frac{1}{j\omega}\mathrm{Sa}\,(\frac{\omega t_0}{2})\,\mathrm{e}^{-j\omega\frac{t_0}{2}}+\pi\delta(\omega)$$

■ 傅里叶变换的基本性质

- 微分与积分（频域微分）

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

则 $(-jt)f(t) \leftrightarrow \dfrac{dF(\omega)}{d\omega}$

证明：$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$

$$\frac{dF(\omega)}{d\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} (-jt)f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$\therefore (-jt)f(t) \leftrightarrow \frac{dF(\omega)}{d\omega} \qquad \therefore t \cdot f(t) \leftrightarrow j \cdot \frac{dF(\omega)}{d\omega}$$

同理：$(-jt)^n f(t) \leftrightarrow \dfrac{d^n F(\omega)}{d\omega^n} \qquad t^n \cdot f(t) \leftrightarrow j^n \cdot \dfrac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$

3.4 傅里叶变换的基本性质

■ 傅里叶变换的基本性质

- 微分与积分（频域积分）

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

则 $-\dfrac{f(t)}{jt} + \pi f(0)\delta(t) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\omega} F(\Omega)d\Omega$

证明：

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}^{-1}[\int_{-\infty}^{\omega} F(\Omega)d\Omega] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{\omega} F(\Omega)d\Omega]e^{j\omega t}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega)u(\omega-\Omega)d\Omega]e^{j\omega t}d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(\omega-\Omega)e^{j\omega t}d\omega]F(\Omega)d\Omega \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}[\pi\delta(t)-\frac{1}{jt}]e^{j\Omega t}F(\Omega)d\Omega \\
&= [\pi\delta(t)-\frac{1}{jt}]f(t) = -\frac{f(t)}{jt}+\pi f(0)\delta(t)
\end{aligned}$$

3.4 傅里叶变换的基本性质

性质名称	时域	频域
线性	$a_1 f_1(t)+a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(\mathrm{j}\omega)+a_2 F_2(\mathrm{j}\omega)$
时移	$f(t-t_0)$	$F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$
频移	$f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$	$F(\mathrm{j}(\omega-\omega_0))$
调制	$f(t)\cos\omega_0 t$	$\frac{1}{2}[F(\mathrm{j}(\omega-\omega_0))+F(\mathrm{j}(\omega+\omega_0))]$
	$f(t)\sin\omega_0 t$	$\frac{1}{2\mathrm{j}}[F(\mathrm{j}(\omega-\omega_0))-F(\mathrm{j}(\omega+\omega_0))]$
尺度变换	$f(at)$	$\frac{1}{\|a\|}F\left(\mathrm{j}\frac{\omega}{a}\right)$
对称性	$F(\mathrm{j}t)$	$2\pi f(-\omega)$
卷积	$f_1(t)*f_2(t)$	$F_1(\mathrm{j}\omega)\cdot F_2(\mathrm{j}\omega)$
相乘	$f_1(t)\cdot f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}F_1(\mathrm{j}\omega)*F_2(\mathrm{j}\omega)$
时域微分	$\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}$	$(\mathrm{j}\omega)^n F(\mathrm{j}\omega)$
时域积分	$\int_{-\infty}^{t} f(x)\mathrm{d}x$	$\pi F(0)\delta(\omega)+\frac{F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{j}\omega}$
频域微分	$(-\mathrm{j}t)^n f(t)$	$\frac{\mathrm{d}^n F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{d}\omega^n}$
频域积分	$\pi f(0)\delta(t)+\frac{f(t)}{-\mathrm{j}t}$	$\int_{-\infty}^{\omega} F(\mathrm{j}\eta)\,\mathrm{d}\eta$
帕塞瓦尔等式	$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\|F(\mathrm{j}\omega)\|^2\,\mathrm{d}\omega$

3.6 周期信号的傅里叶变换

$$\begin{tikzcd} \text{周期信号} \arrow[r] \arrow[d, "T_1 \to \infty"] \arrow[dr, "?"] & \text{傅里叶级数} \arrow[d, "T_1 \to \infty"] \\ \text{非周期信号} \arrow[r] & \text{傅里叶变换} \end{tikzcd}$$

3.6 周期信号的傅里叶变换

- 正弦、余弦信号的傅里叶变换

$$f(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow F(\omega-\omega_0)$$

$$\mathscr{F}[e^{j\omega_1 t}] = 2\pi\delta(\omega-\omega_1)$$

$$\mathscr{F}[\cos\omega_1 t] = \mathscr{F}[\frac{e^{j\omega_1 t}+e^{-j\omega_1 t}}{2}] = \pi[\delta(\omega-\omega_1)+\delta(\omega+\omega_1)]$$

$$\mathscr{F}[\sin\omega_1 t] = \mathscr{F}[\frac{e^{j\omega_1 t}-e^{-j\omega_1 t}}{2j}] = j\pi[\delta(\omega+\omega_1)-\delta(\omega-\omega_1)]$$

$$f(t)\cos\omega_0 t \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{2}[F(\omega+\omega_0)+F(\omega-\omega_0)]$$

$$f(t)\sin\omega_0 t \quad \leftrightarrow \quad \frac{j}{2}[F(\omega+\omega_0)-F(\omega-\omega_0)]$$

3.6 周期信号的傅里叶变换

■ 一般周期信号的傅里叶变换

周期信号 $f(t)$ 周期 T_1，角频率 $\omega_1=\dfrac{2\pi}{T_1}$, 则

复指数形式的傅里叶级数 $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_1 t}$

两边取傅里叶变换可得

$$F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]=\mathscr{F}[\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_1 t}]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\mathscr{F}[e^{jn\omega_1 t}]$$

$$=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\omega-n\omega_1)$$

周期信号 $f(t)$ 的傅里叶变换是由一系列冲激函数所组成，这些冲激位于信号的谐频处 $(0,\pm\omega_1,\pm2\omega_1,\cdots)$，每个冲激的强度等于 $f(t)$ 的傅里叶级数相应系数 F_n 的 2π 倍。

一般周期信号的傅里叶变换

周期信号傅里叶级数系数与单脉冲（非周期）的傅里叶变换的关系？

复指数形式的傅里叶级数 $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}$

傅里叶系数 $F_n=\dfrac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$

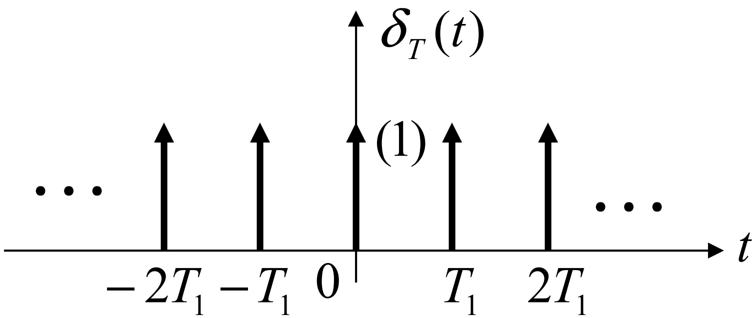
从周期信号 $f(t)$ 中截取一个周期(假设为 $-\frac{T_1}{2}\sim\frac{T_1}{2}$)，得到单脉冲信号 $f_0(t)$，其傅里叶变换

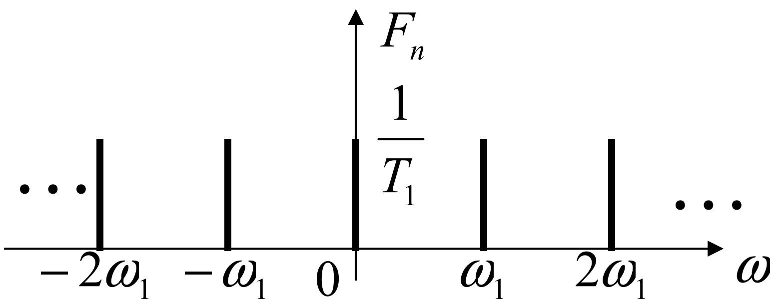
$$F_0(\omega)=\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

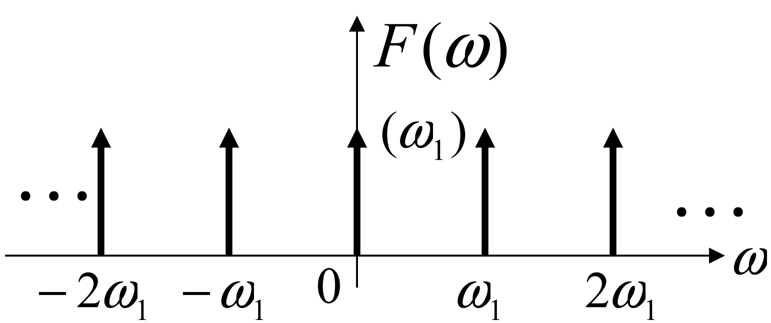
$$\therefore F_n=\frac{1}{T_1}F_0(\omega)\Big|_{\omega=n\omega_1}$$

■ 一般周期信号的傅里叶变换

例：求周期单位冲激序列的傅里叶级数与傅里叶变换。







解：

$$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_1)$$

$$F_n=\frac{1}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2}\delta(t)e^{-jn\omega_1 t}dt=\frac{1}{T_1}$$

$$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_1 t}=\frac{1}{T_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{jn\omega_1 t}$$

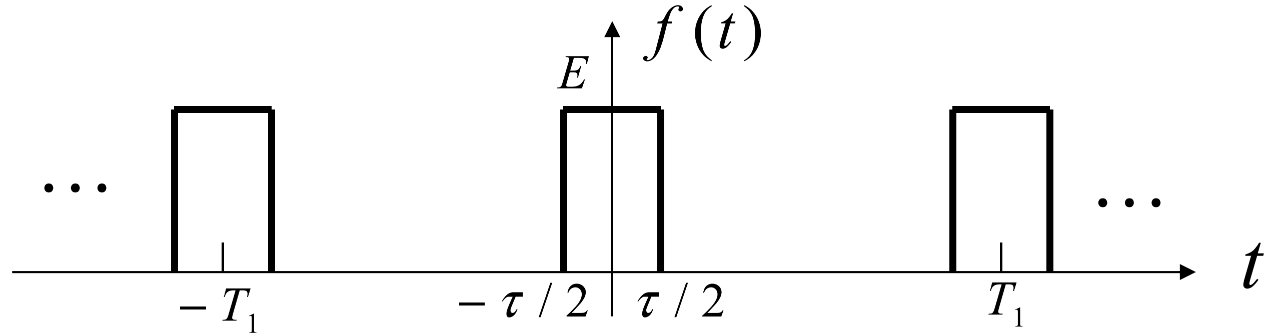
$$F(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\cdot\delta(\omega-n\omega_1)$$

$$=\omega_1\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_1)$$

3.6 周期信号的傅里叶变换

■ 一般周期信号的傅里叶变换

例：求周期矩形脉冲信号的傅里叶级数及傅里叶变换。



解：单矩形脉冲信号 $f_0(t)$ 的傅里叶变换为

$$F_0(\omega)=E\tau\cdot\mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})\qquad F_n=\frac{1}{T_1}F_0(\omega)\Big|_{\omega=n\omega_1}=\frac{E\tau}{T_1}\mathrm{Sa}(\frac{n\omega_1\tau}{2})$$

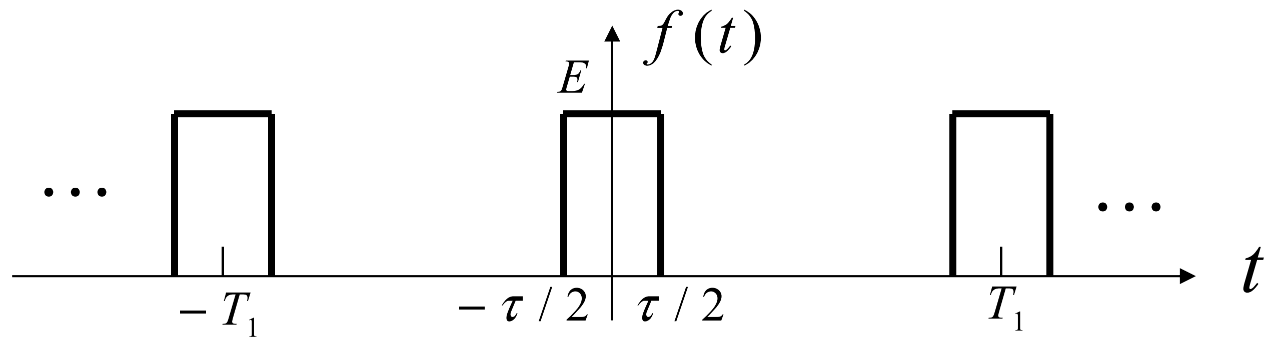
$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_1 t}=\frac{E\tau}{T_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}Sa\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)e^{jn\omega_1 t}$$

$$F(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\cdot\delta(\omega-n\omega_1)=E\tau\omega_1\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}(\frac{n\omega_1\tau}{2})\delta(\omega-n\omega_1)$$

3.6 周期信号的傅里叶变换

■ 一般周期信号的傅里叶变换

例：求周期矩形脉冲信号的傅里叶级数及傅里叶变换。

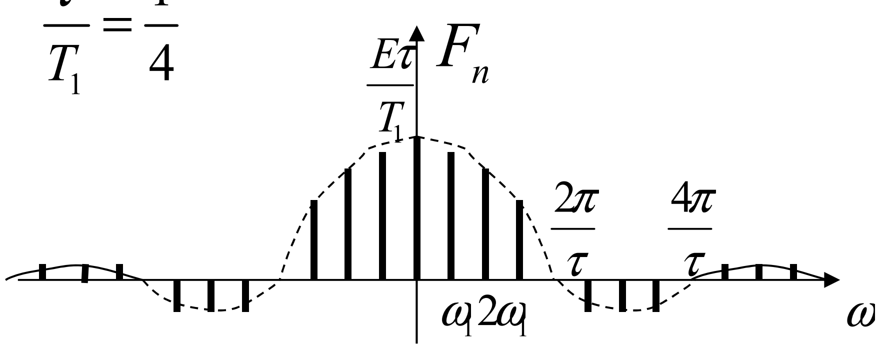


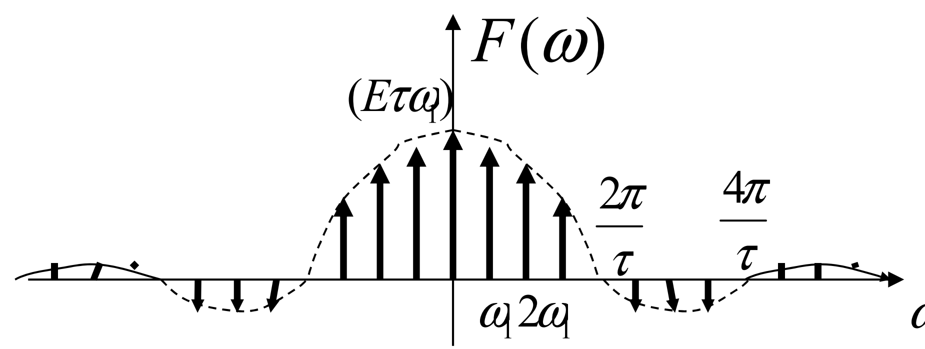
解：

$$F_n=\frac{E\tau}{T_1}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)$$

$$F(\omega)=E\tau\omega_1\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)\delta(\omega-n\omega_1)$$

$$\frac{\tau}{T_1}=\frac{1}{4}$$



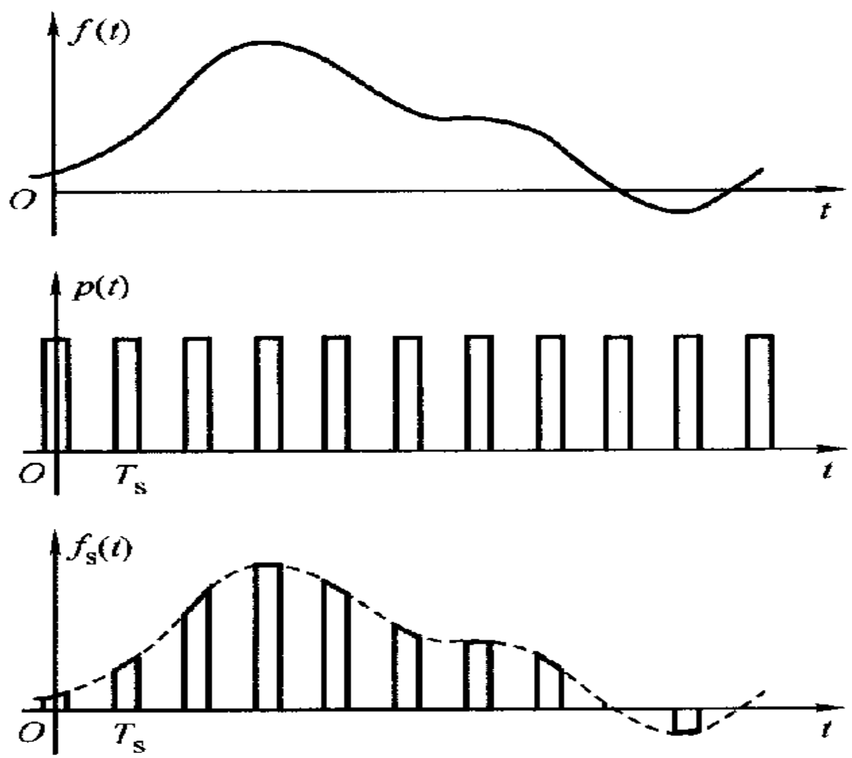


3.7 抽样定理

抽样信号的傅里叶变换

- 信号的抽样

抽样：利用取样脉冲序列 $p(t)$ 从连续信号 $f(t)$ 中"抽样"一系列的离散样值，这种离散信号通常称为"抽样信号"。

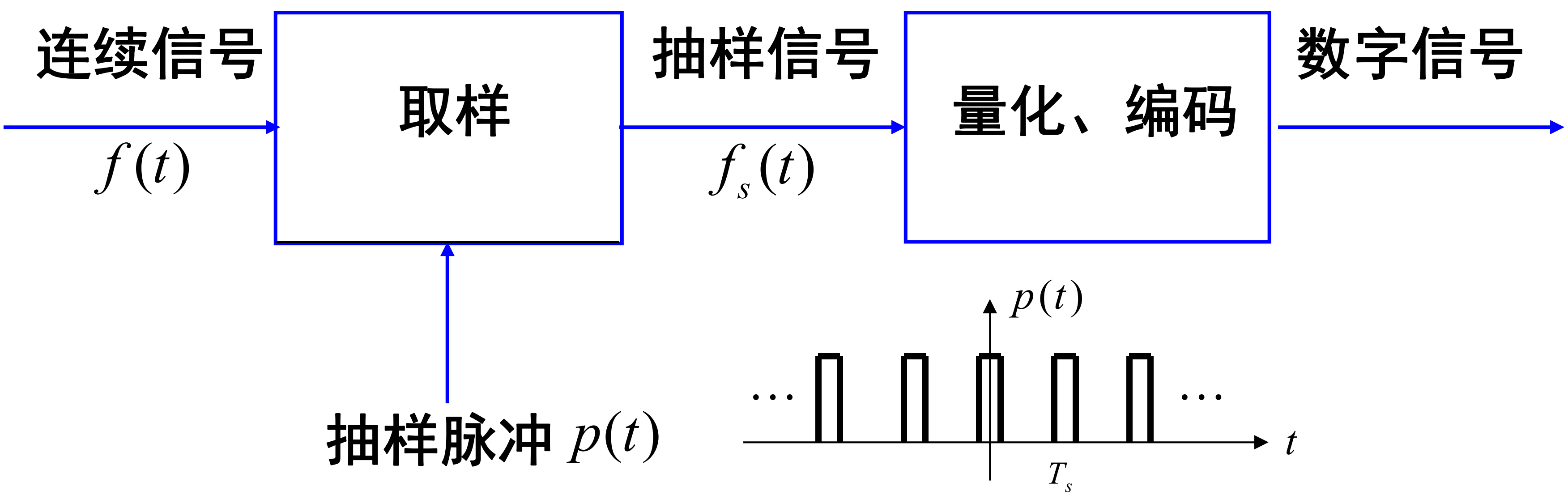


3.7 抽样定理

■ 抽样信号的傅里叶变换

- 信号的抽样

抽样：利用取样脉冲序列 $p(t)$ 从连续信号 $f(t)$ 中“抽样”一系列的离散样值，这种离散信号通常称为“抽样信号”。



$$f_s(t) = f(t)p(t)$$

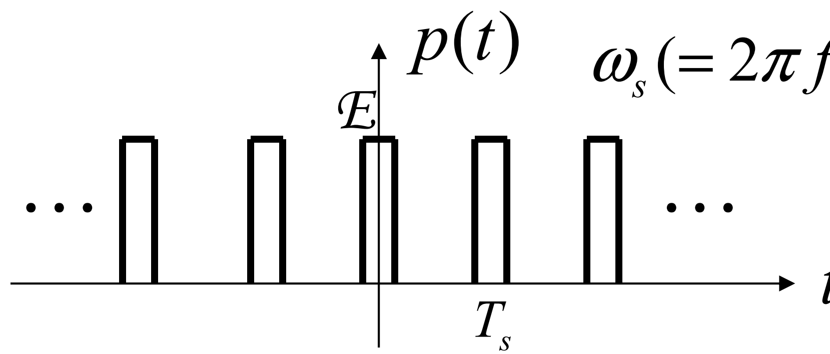
■ 抽样信号的傅里叶变换

- 抽样信号的傅里叶变换

连续信号 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

抽样脉冲 $p(t) \leftrightarrow P(\omega)$

抽样信号 $f_s(t) \leftrightarrow F_s(\omega)$



$$\omega_s \left(= 2\pi f_s = \frac{2\pi}{T_s}\right)$$

$$P(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n \delta(\omega - n\omega_s) \qquad P_n = \frac{1}{T_s}\int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} p(t) e^{-jn\omega_s t} dt$$

$$\because f_s(t) = f(t)p(t)$$

$$\therefore F_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * P(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n \delta(\omega - n\omega_s)$$

$$\therefore F_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n \cdot F(\omega - n\omega_s)$$

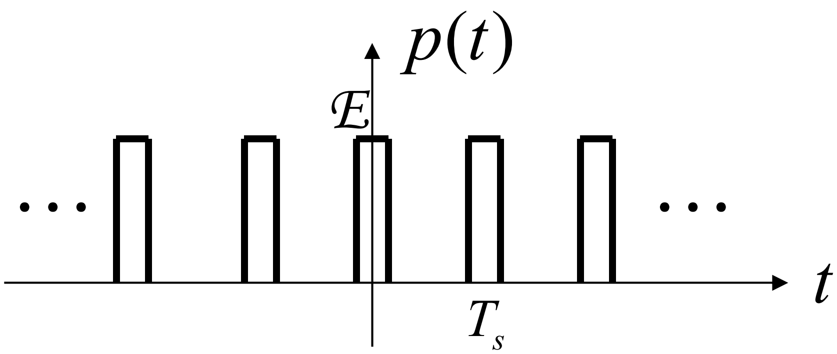
抽样信号的傅里叶变换

- 矩形脉冲抽样（自然抽样）

$$P_n = \frac{1}{T_s}\int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} p(t)e^{-jn\omega_s t}dt$$

$$= \frac{1}{T_s}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} Ee^{-jn\omega_s t}dt$$

$$= \frac{E\tau}{T_s}\mathrm{Sa}(\frac{n\omega_s\tau}{2})$$



$$\omega_s (= 2\pi f_s = \frac{2\pi}{T_s})$$

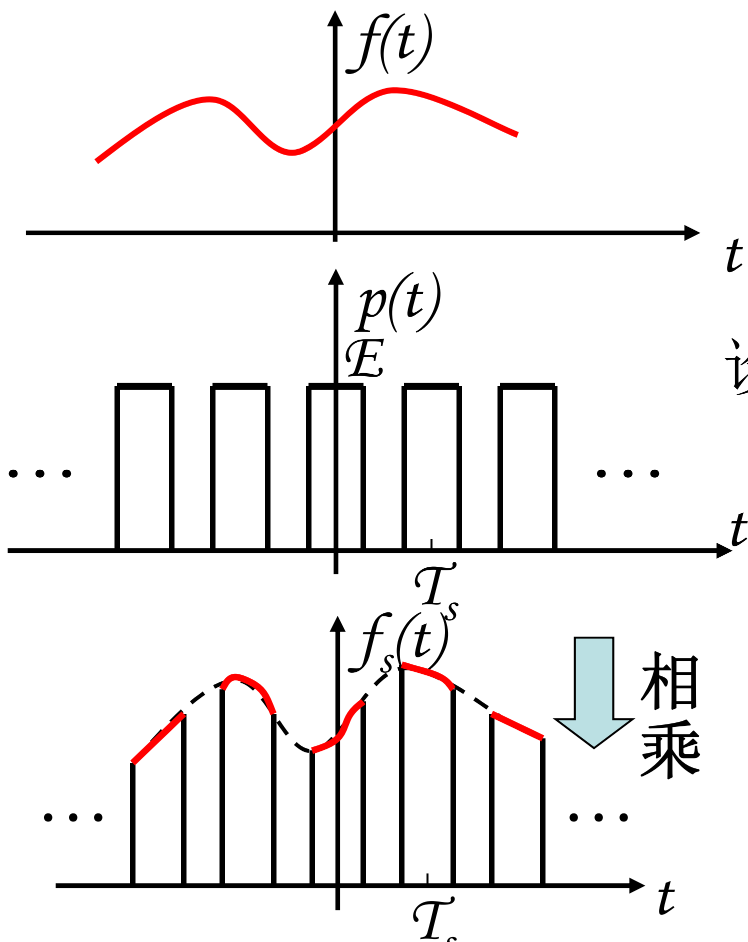
$$\because F_s(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n \cdot F(\omega - n\omega_s)$$

$$\therefore F_s(\omega) = \frac{E\tau}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}(\frac{n\omega_s\tau}{2})F(\omega - n\omega_s)$$

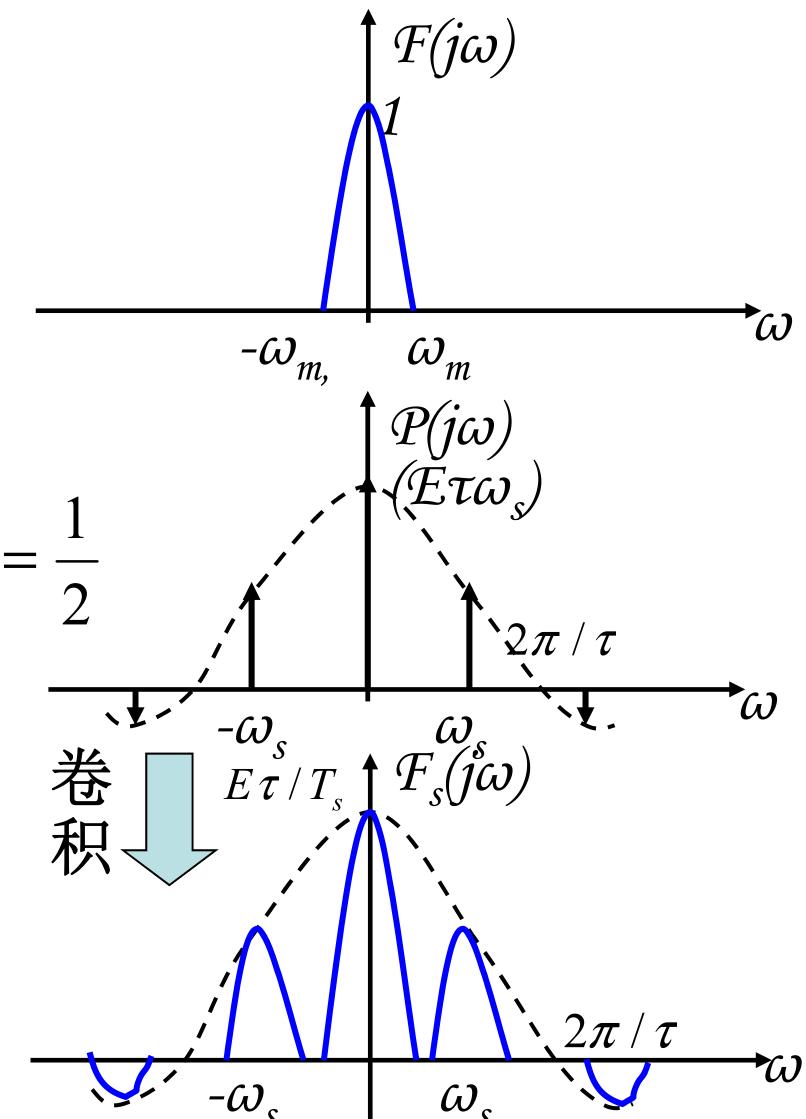
3.7 抽样定理

抽样信号的傅里叶变换

- 矩形脉冲抽样（自然抽样）



设：$\dfrac{\tau}{T_s} = \dfrac{1}{2}$

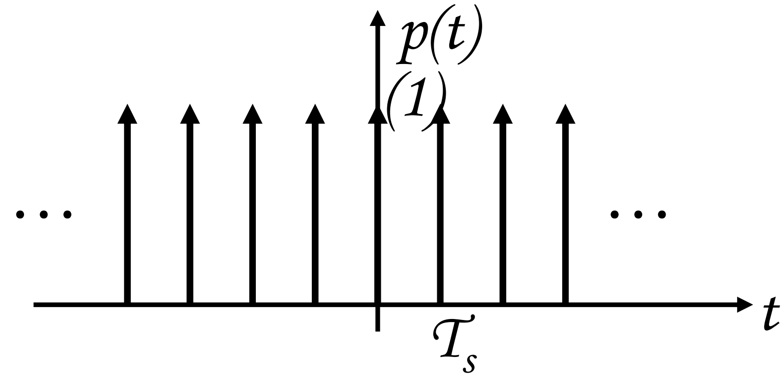


3.7 抽样定理

抽样信号的傅里叶变换

- 冲激抽样（理想抽样）

$$p(t)=\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$$



$$P_n=\frac{1}{T_s}\int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}}\delta(t)e^{-jn\omega_s t}dt=\frac{1}{T_s}$$

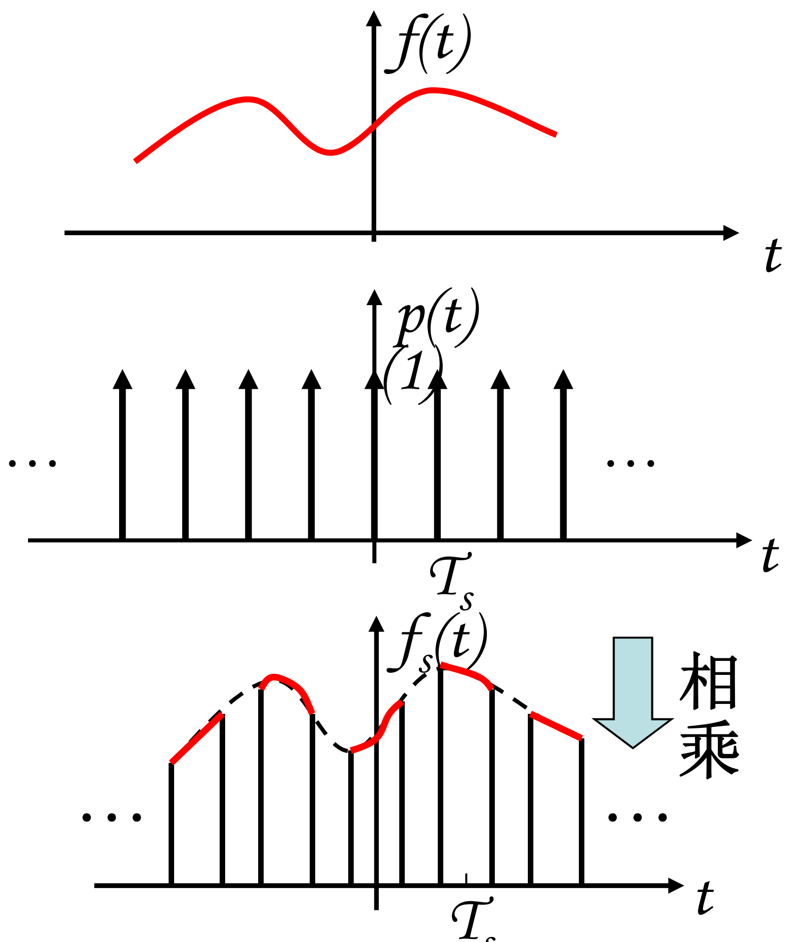
$$\omega_s(=2\pi f_s=\frac{2\pi}{T_s})$$

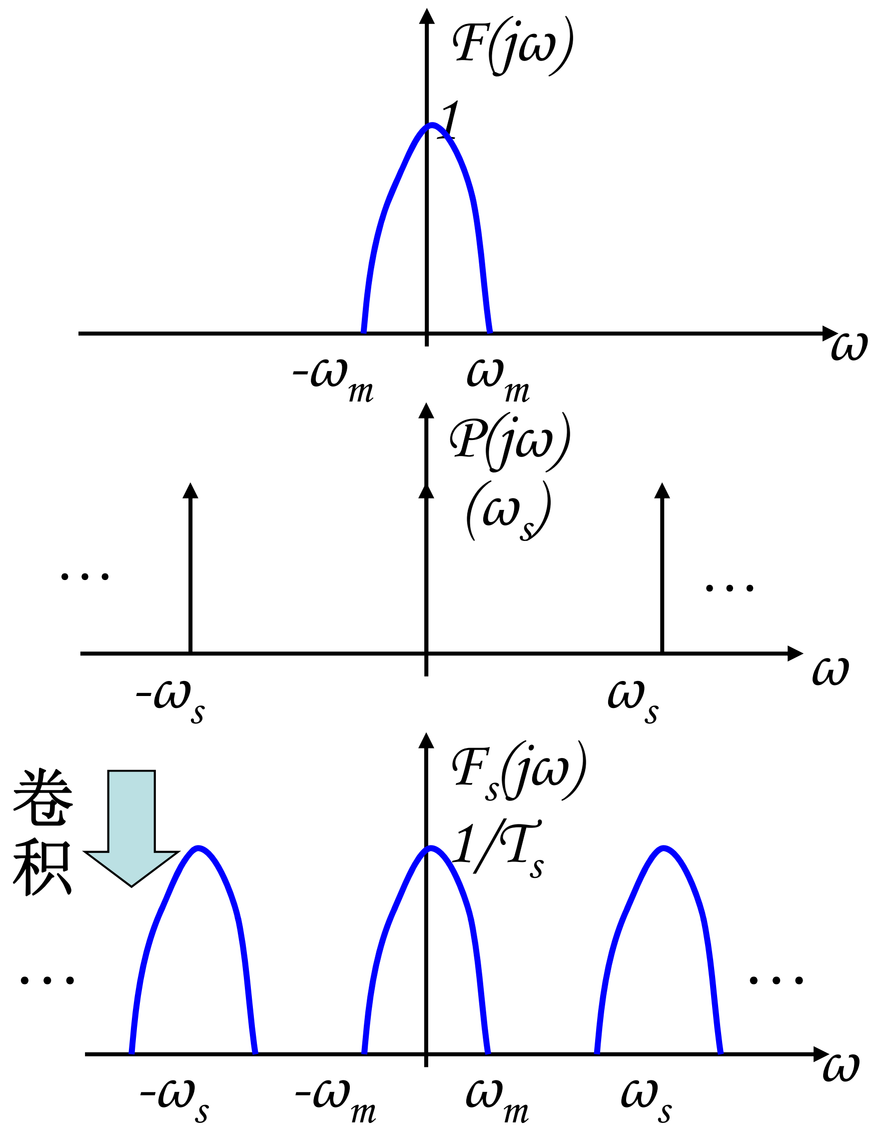
$$\because F_s(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}P_n\cdot F(\omega-n\omega_s)$$

$$\therefore F_s(\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\omega-n\omega_s)$$

3.7 抽样定理

- 抽样信号的傅里叶变换
  - 冲激抽样（理想抽样）

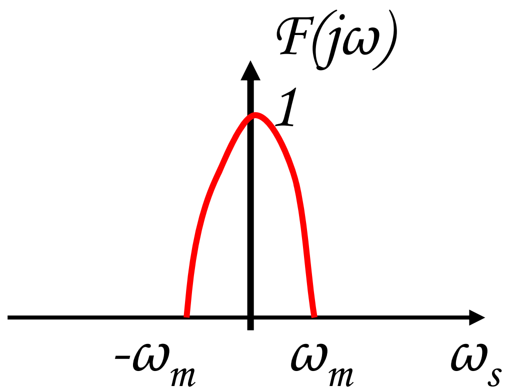


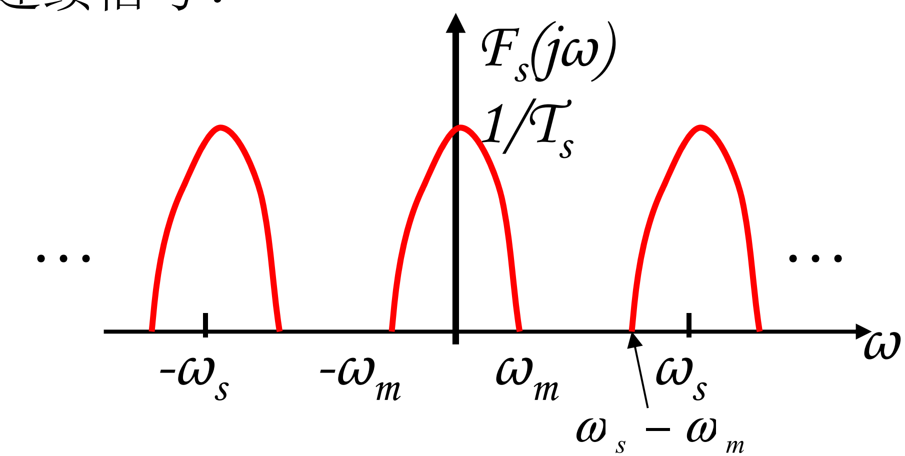


抽样定理

问题：

- 用抽样脉冲对连续信号进行抽样，抽样周期取多大合适呢？
- 如何从抽样信号中恢复原连续信号？





从上图可知：只有满足 $\omega_s \geq 2\omega_m$, $F_s(j\omega)$ 才不会产生频谱混叠，即 $f_s(t)$ 保留了原连续时间信号的全部信息。通常把最低允许的抽样率称为奈奎斯特抽样率，把最大允许的抽样间隔称为奈奎斯特间隔，即

$$\omega_{s\min} = 2\omega_m \qquad f_{s\min} = 2f_m \qquad T_{s\max} = \frac{1}{f_{s\min}} = \frac{1}{2f_m} = \frac{T_m}{2}$$

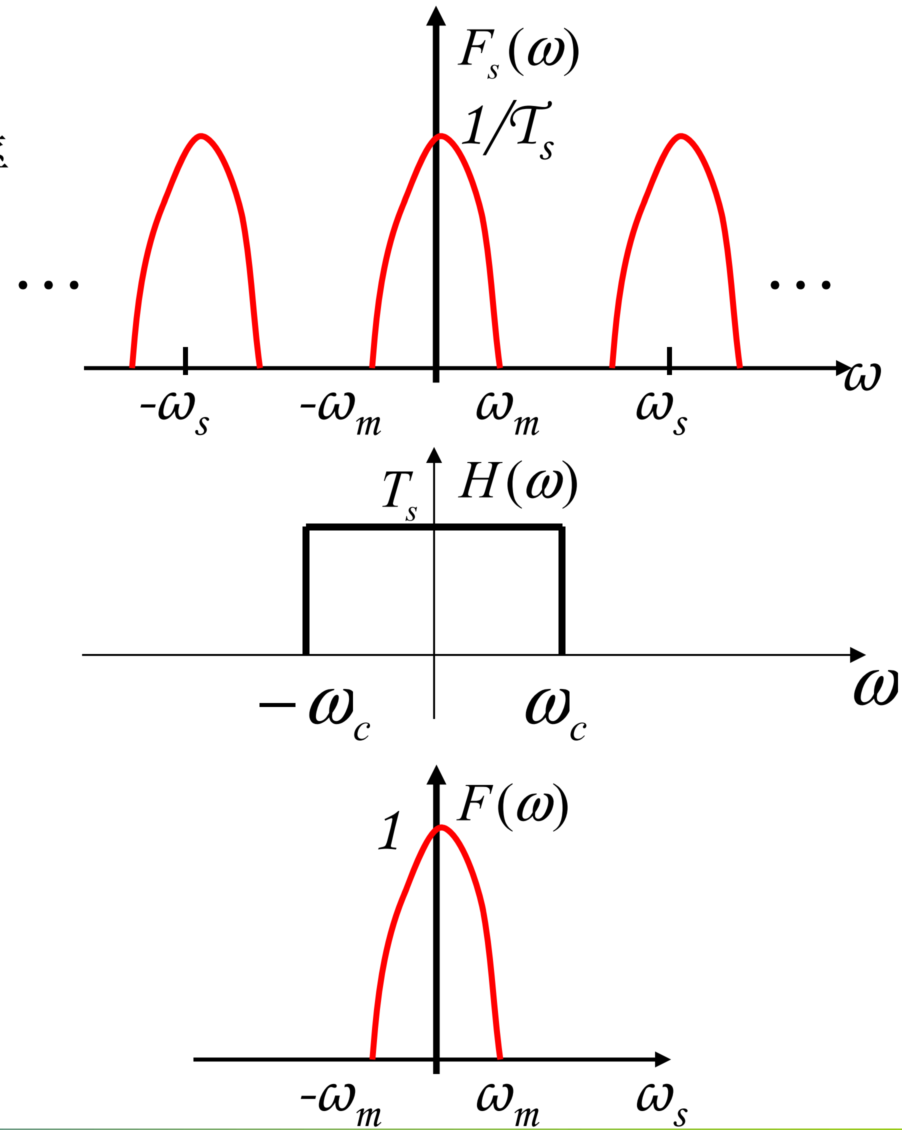
■ 抽样定理

只要将 $f_s(t)$ 施加于具备如下频率特性的低通滤波器，就可恢复原信号 $f(t)$。

滤波器的频率特性为：

$$H(\omega)=\begin{cases} T_s & (|\omega|\le\omega_c) \\ 0 & (|\omega|>\omega_c) \end{cases}$$

$$\omega_m \le \omega_c \le \omega_s-\omega_m$$



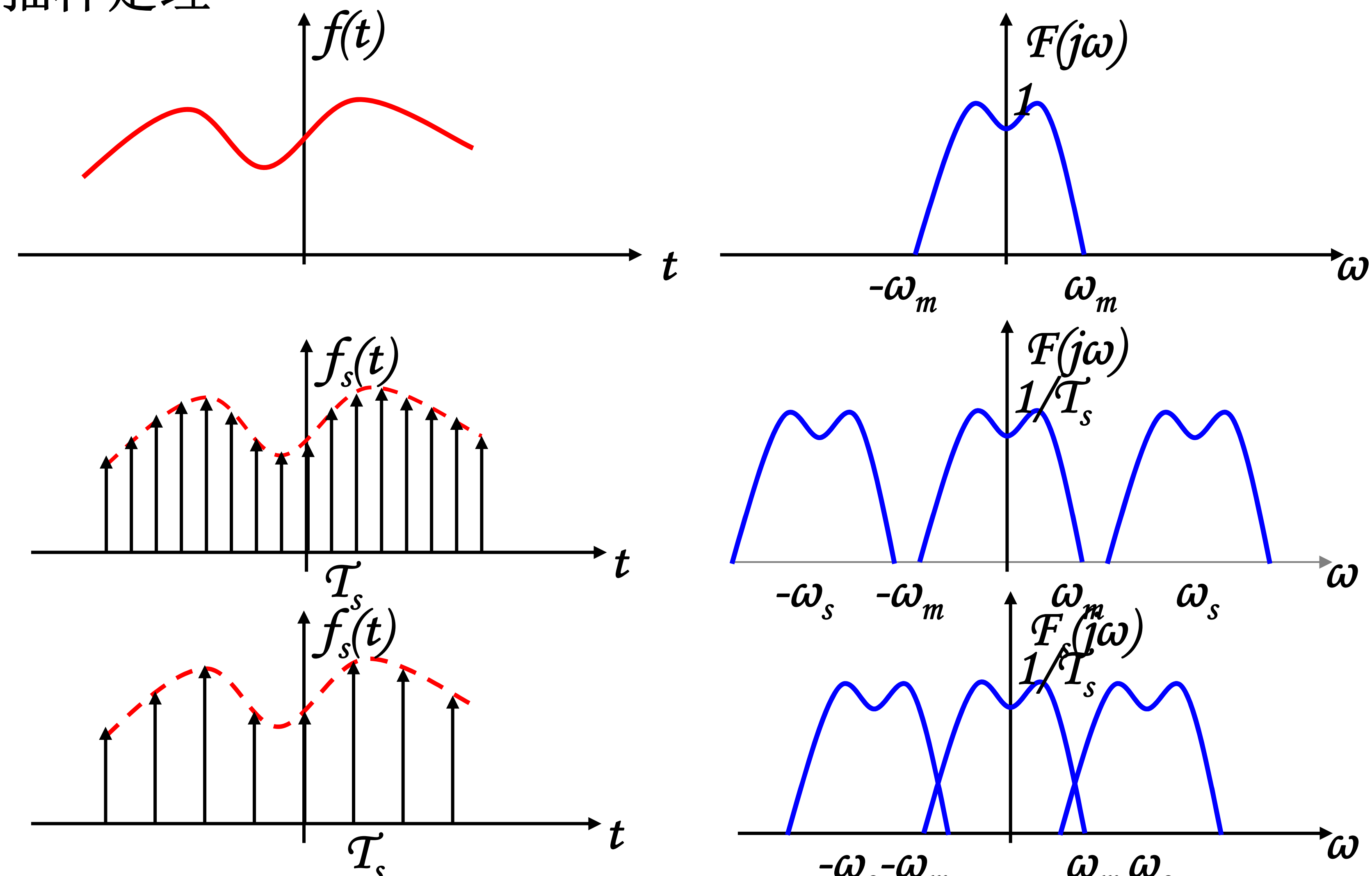
■ 抽样定理

- 时域抽样定理

时域抽样定理：一个频率受限的信号$f(t)$，如果频谱只占据$-\omega_m \sim \omega_m$的范围，则信号 $f(t)$ 可以用等间隔的抽样值来唯一地表示。而抽样间隔必须不大于 $1/2f_m$ (其中 $f_m = \omega_m/2\pi$ ），或者说最低抽样频率为$2f_m$。

3.7 抽样定理

■ 抽样定理



f(t)
t
F(jω)
1
-ω_m
ω_m
ω
f_s(t)
T_s
t
F(jω)
1/T_s
-ω_s
-ω_m
ω_m
ω_s
ω
f_s(t)
T_s
t
F_s(jω)
1/T_s
-ω_s
-ω_m
ω_m
ω_s
ω

3.7 抽样定理

■ 抽样定理

- 时域抽样定理

例：已知信号 $f(t)=\mathrm{Sa}(2t)$，用 $\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$ 对其进行取样，

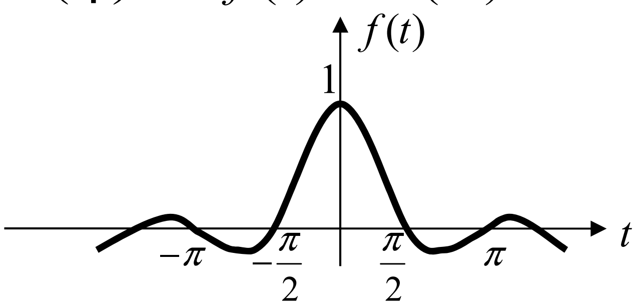
（1）确定奈奎斯特取样率；

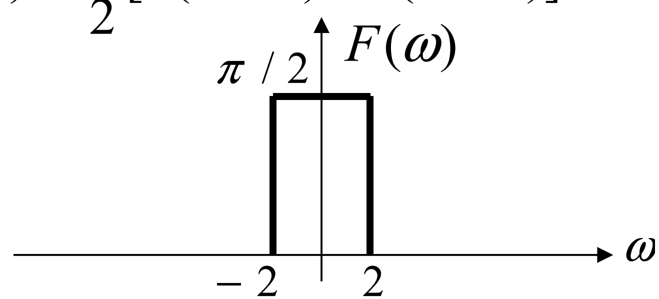
（2）若取 $\omega_s=6\omega_m$，求取样信号 $f_s(t)=f(t)\delta_T(t)$，并画出波形图；

（3）求 $F_s(\omega)=\mathscr{F}[f_s(t)]$，并画出频谱图；

（4）确定低通滤波器的截止频率 ω_c。

解：（1） $\because f(t)=\mathrm{Sa}(2t)$ $\quad\therefore F(\omega)=\dfrac{\pi}{2}[u(\omega+2)-u(\omega-2)]$





奈奎斯特取样率为： $\omega_{s\min}=2\omega_m=2\times2=4\ \mathrm{rad/s}$

3.7 抽样定理

抽样定理

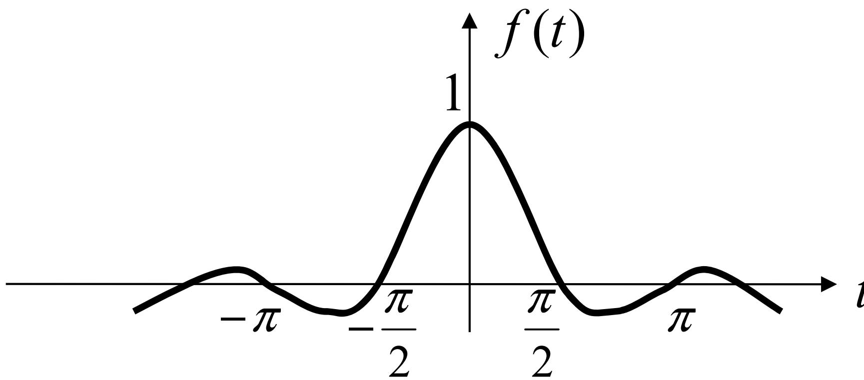
- 时域抽样定理

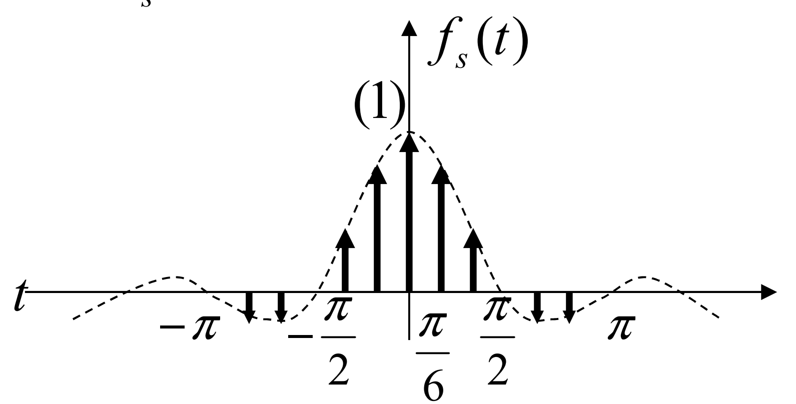
例： 已知信号 $f(t)=\mathrm{Sa}(2t)$，用 $\delta_T(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$ 对其进行取样，

（2）若取 $\omega_s=6\omega_m$，求取样信号 $f_s(t)=f(t)\delta_T(t)$， 并画出波形图；

解：（1） 奈奎斯特取样率为： $\omega_{s\min}=2\omega_m=2\times2=4\ \mathrm{rad/s}$

（2）$\because\ \omega_s=6\omega_m=12\ \mathrm{rad/s}\quad \therefore T_s=\dfrac{2\pi}{\omega_s}=\dfrac{2\pi}{12}=\dfrac{\pi}{6}\ \mathrm{s}$





$$f_s(t)=f(t)\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}(2t)\delta(t-nT_s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}(2nT_s)\delta(t-nT_s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}(\frac{n\pi}{3})\delta(t-nT_s)$$

■ 抽样定理

- 时域抽样定理

例：已知信号 $f(t)=\mathrm{Sa}(2t)$，用 $\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$ 对其进行取样，

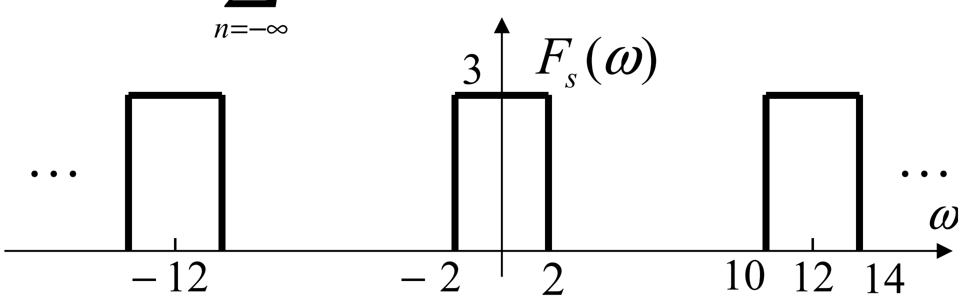
（3）求 $F_s(\omega)=\mathscr{F}[f_s(t)]$，并画出频谱图；

解：（1） 奈奎斯特取样率为： $\omega_{s\min}=2\omega_m=2\times2=4\ \mathrm{rad/s}$

（2） $f_s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}(\frac{n\pi}{3})\delta(t-nT_s)$

（3） $F_s(\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\omega-n\omega_s)=\frac{6}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\omega-12n)$

$$=3\sum_{n=-\infty}^{\infty}[u(\omega+2-12n)-u(\omega-2-12n)]$$



抽样定理

- 时域抽样定理

例：已知信号 $f(t)=\mathrm{Sa}(2t)$，用 $\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$ 对其进行取样，（4）确定低通滤波器的截止频率 ω_c。

解：（1） 奈奎斯特取样率为： $\omega_{s\min}=2\omega_m=2\times 2=4\ \mathrm{rad/s}$

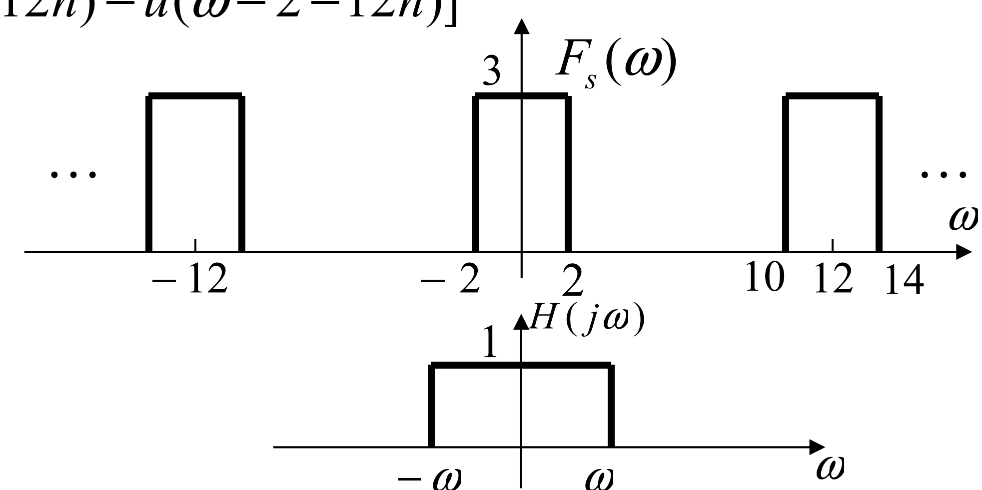
（2） $f_s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}(\frac{n\pi}{3})\delta(t-nT_s)$

（3） $F_s(\omega)=3\sum_{n=-\infty}^{\infty}[u(\omega+2-12n)-u(\omega-2-12n)]$

（4）低通滤波器的截止频率 ω_c 应满足：

$$\omega_m\le\omega_c\le\omega_s-\omega_m$$

即： $2\le\omega_c\le 10$



3.7 抽样定理

■ 抽样定理

- 时域抽样定理

例：设 $f(t)$ 为带限信号，带宽 $\omega_m=8$，频谱如图所示，试分别求 $f(2t), f(\frac{t}{2})$ 的带宽和奈奎斯特取样率 ω_s。

解：$f(t)\leftrightarrow F(\omega)$

（1）$f(2t)\leftrightarrow \frac{1}{2}F(\frac{\omega}{2})$

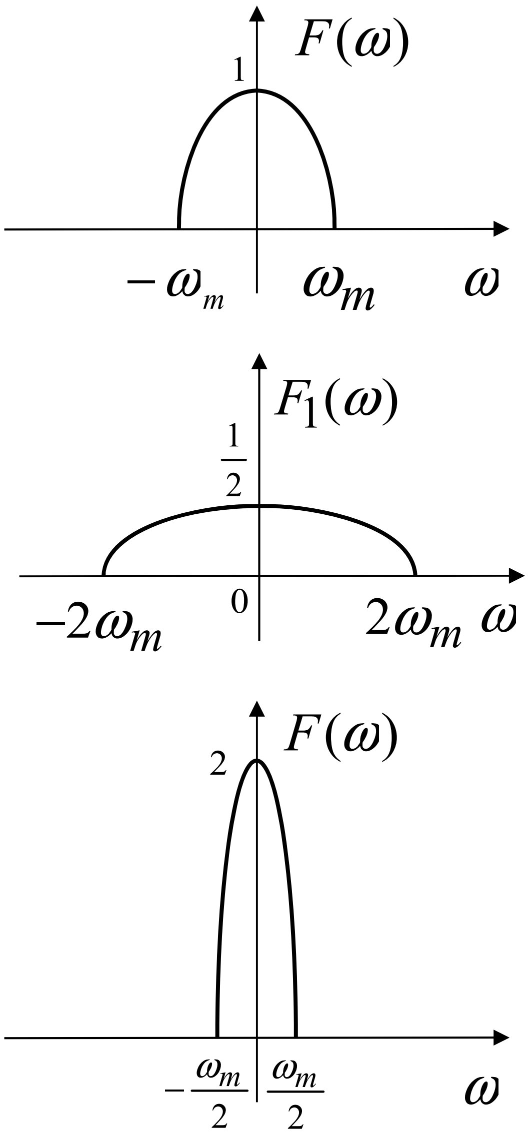
频带宽度为 $2\omega_m=16rad/s$

奈奎斯特采样率 $\omega_s=2\cdot 2\omega_m=32rad/s$

（2）$f(\frac{t}{2})\leftrightarrow 2F(2\omega)$

频带宽度为 $\frac{1}{2}\omega_m=4rad/s$

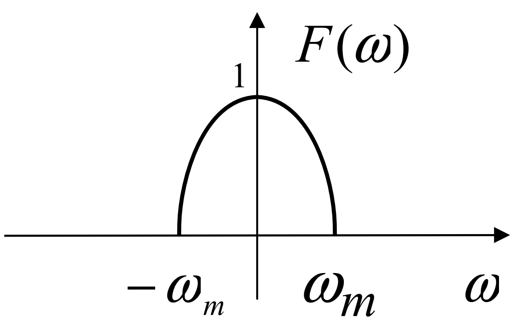
奈奎斯特采样率 $\omega_s=2\cdot\frac{1}{2}\omega_m=8rad/s$



抽样定理

- 时域抽样定理

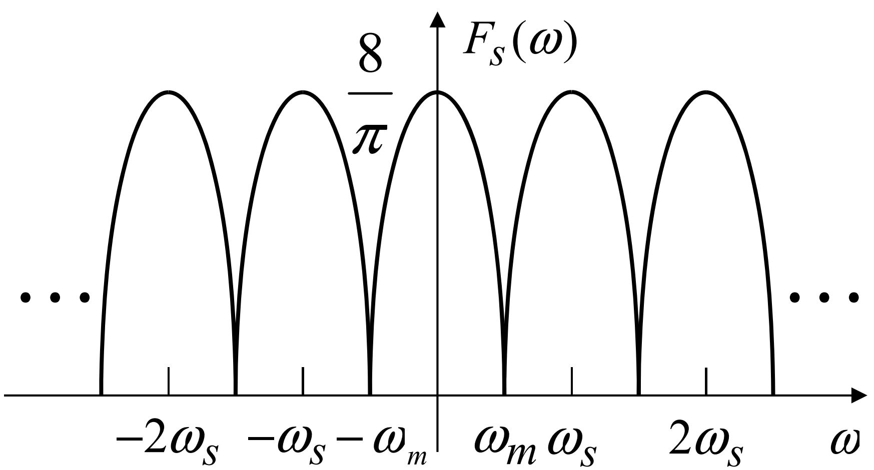
例：设 $f(t)$ 为带限信号，带宽 $\omega_m=8$，频谱如图所示，若用取样序列 $\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(t-n\frac{\pi}{8}\right)$ 对 $f(t)$ 进行取样得到 $f_s(t)$，试求 $f_s(t)$ 的频谱，并画出频谱图。



解： $T_s=\frac{\pi}{8}$，$\omega_s=\frac{2\pi}{T_s}=16rad/s$

$$F_s(\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\omega-n\omega_s)$$

$$=\frac{8}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\omega-16n)$$



抽样定理

- 时域抽样定理

例：求下列信号的奈奎斯特取样率。

$(1)\mathrm{Sa}(100t) \quad (2)\mathrm{Sa}^2(100t) \quad (3)\mathrm{Sa}(100t)+\mathrm{Sa}^{10}(50t)$

解：（1） $\because g_\tau(t) \leftrightarrow \tau Sa(\frac{\omega\tau}{2}) \qquad \therefore \tau Sa(\frac{\tau t}{2}) \leftrightarrow 2\pi g_\tau(\omega)$

$$\frac{\tau}{2}=100, \omega_m=100 rad/s$$

$$\therefore \omega_s=2\omega_m=200 rad/s$$

思考：

如果时域两个信号卷积呢？

（2）时域两个信号相乘，所得信号的带宽为两个信号带宽之和。

$$\omega_{m2}=200 rad/s，\ \omega_{s2}=2\omega_{m2}=400 rad/s$$

（3）时域两个信号相加，所得信号的带宽为两个信号带宽较大者。

$$\omega_{m3}=\max(100,50\times10)=500 rad/s \qquad \omega_{s3}=2\omega_{m3}=1000 rad/s$$

抽样定理

- 频域抽样定理

若原始信号$f(t)$的频谱为$F(\omega)$，$F(\omega)$在频域被间隔为ω_1的周期序列$\delta_{\omega_1}(\omega)$抽样，得到：

$$F_1(\omega)=F(\omega)\cdot\delta_{\omega_1}(\omega) \qquad \delta_{\omega_1}(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_1)$$

由时域卷积定理可得：

$$\mathscr{F}^{-1}[F_1(\omega)]=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]*\mathscr{F}^{-1}[\delta_{\omega_1}(\omega)]$$

$$\therefore f_1(t)=f(t)*\frac{1}{\omega_1}\delta_{T_1}(t)=f(t)*\frac{1}{\omega_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_1)$$

$$\therefore f_1(t)=\frac{1}{\omega_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(t-nT_1)$$

3.7 抽样定理

■ 抽样定理

- 频域抽样定理

$$f_1(t)=\frac{1}{\omega_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t-nT_1)$$

频域抽样定理：一个时间受限的信号$f(t)$，如果集中在 $-t_m \sim t_m$ 的时间范围，若在频域中以不大于 $\frac{1}{2t_m}$ 的频率间隔对$f(t)$的频谱函数$F(\omega)$进行抽样，则抽样后的频谱$F_1(\omega)$可以唯一地表示原信号。

傅里叶变换形式的系统函数

- 定义

系统零状态响应： $r(t)=e(t)*h(t)$

两边取傅里叶变换： $R(\omega)=E(\omega)\cdot H(\omega)$

系统函数： $H(\omega)\triangleq\mathscr{F}[h(t)]$

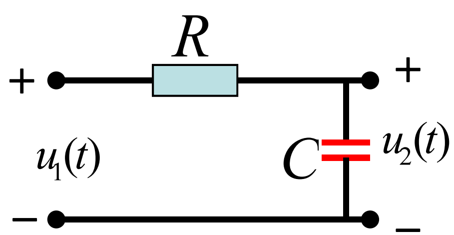
$$H(\omega)=\frac{R(\omega)}{E(\omega)}$$

3.8 无失真传输

■ 傅里叶变换形式的系统函数

- 定义

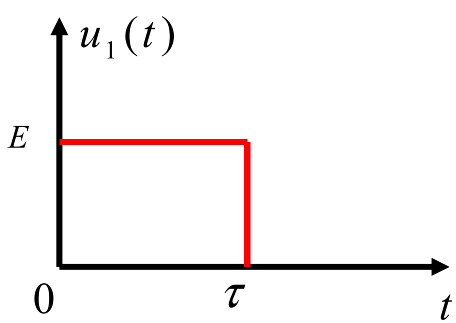
例：如图所示的RC低通网络，输入$u_1(t)$为如图所示矩形脉冲，求输出 $u_2(t)$ 。



解：
$$RC\frac{du_2(t)}{dt}+u_2(t)=u_1(t)$$

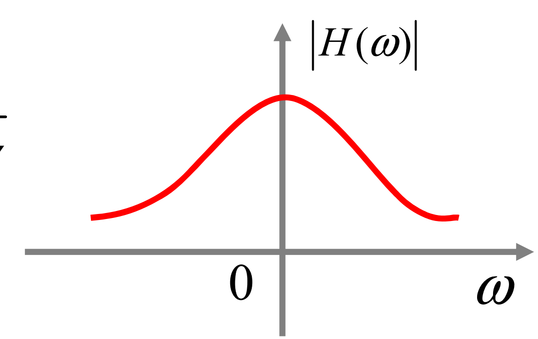
$$RC(j\omega)V_2(\omega)+V_2(\omega)=V_1(\omega)$$

$$V_2(\omega)=\frac{\frac{1}{RC}}{j\omega+\frac{1}{RC}}V_1(\omega)$$



$$H(\omega)=\frac{V_2(\omega)}{V_1(\omega)}=\frac{\alpha}{j\omega+\alpha}$$

$$(\alpha=\frac{1}{RC})$$



傅里叶变换形式的系统函数

- 定义

例：如图所示的RC低通网络，输入$u_1(t)$为如图所示矩形脉冲，求输出 $u_2(t)$ 。

解：

$$\because u_1(t)=E\left[u(t)-u(t-\tau)\right]$$

$$\therefore V_1(\omega)=E\pi\delta(\omega)+\frac{E}{j\omega}-E\pi\delta(\omega)e^{-j\omega\tau}-\frac{E}{j\omega}e^{-j\omega\tau}$$

$$=E\tau\,\mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}$$

$$\because V_2(\omega)=H(\omega)\cdot V_1(\omega)$$

$$\therefore V_2(\omega)=\frac{\alpha}{\alpha+j\omega}\left[E\tau\,\mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})\right]e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}=\left|V_2(\omega)\right|e^{j\varphi_2(\omega)}$$

傅里叶变换形式的系统函数

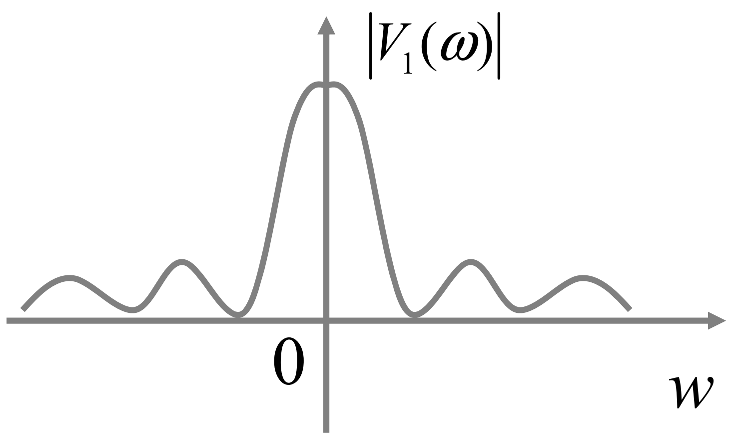
- 定义

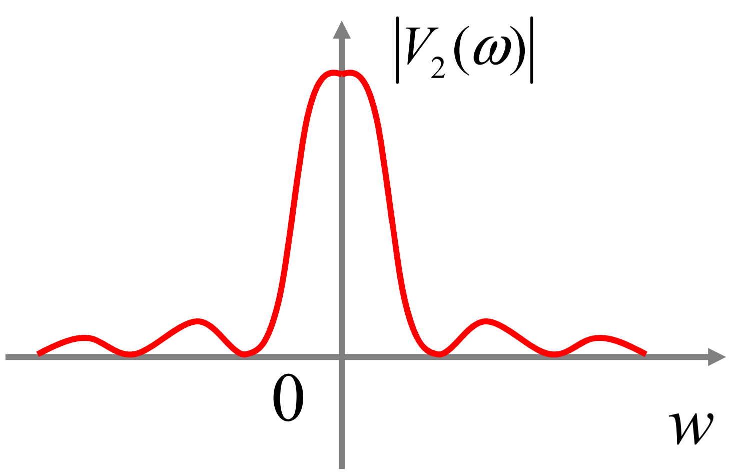
例：如图所示的RC低通网络，输入$u_1(t)$为如图所示矩形脉冲，求输出 $u_2(t)$ 。

解：

$$|V_1(\omega)| = \left|E\tau \mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})\right| = \left|\frac{2E\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\omega}\right|$$

$$|V_2(\omega)| = \left|\frac{2E\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\omega}\right| \cdot \frac{1}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}$$





傅里叶变换形式的系统函数

- 定义

例：如图所示的RC低通网络，输入$u_1(t)$为如图所示矩形脉冲，求输出 $u_2(t)$ 。

解：

$$V_2(\omega)=\frac{\alpha}{\alpha+j\omega}\bullet\frac{E}{j\omega}(1-e^{-j\omega\tau})=E(\frac{1}{j\omega}-\frac{1}{\alpha+j\omega})(1-e^{-j\omega\tau})$$

$$=E\frac{1}{j\omega}(1-e^{-j\omega\tau})-\frac{E}{\alpha+j\omega}(1-e^{-j\omega\tau})$$

$$\therefore u_2(t)=E\left[u(t)-u(t-\tau)\right]-E\left[e^{-\alpha t}u(t)-e^{-\alpha(t-\tau)}u(t-\tau)\right]$$

$$=E\left(1-e^{-\frac{1}{RC}t}\right)u(t)-E\left[1-e^{-\frac{1}{RC}(t-\tau)}\right]u(t-\tau)$$

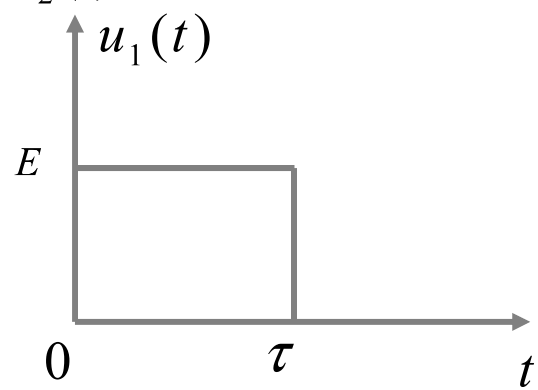
3.8 无失真传输

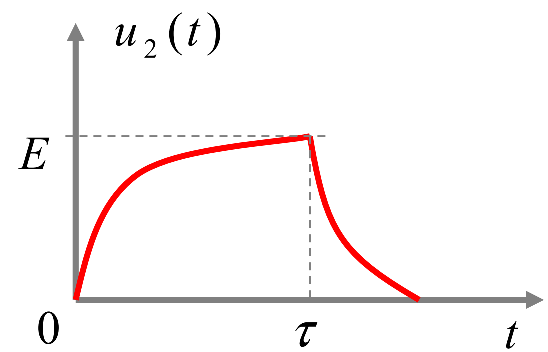
■ 傅里叶变换形式的系统函数

- 定义

例：如图所示的RC低通网络，输入$u_1(t)$为如图所示矩形脉冲，求输出 $u_2(t)$ 。

解：





输出信号的波形与输入信号相比产生了失真。

（1）输入信号在t=0时刻急剧上升，

（2）在t=τ时刻急剧下降。急剧变化意味着有很高的频率分量。

系统的H(jw)为低通滤波器，不允许高频分量通过，输出电压不能迅速变化，于是不再表现为矩形脉冲，而是以指数规律逐渐上升和下降。

无失真传输

- 信号失真

(1) 幅度失真

系统对信号中各频率分量幅度产生不同程度的衰减，使响应中各频率分量的相对幅度产生变化，即引入幅度失真。

(2) 相位失真

系统对信号中各频率分量产生相移不与频率成正比，使响应中各频率分量在时间轴上的相对位置产生变化，即引入相位失真。

无失真传输

- 信号失真

线性系统：幅度失真与相位失真都不产生新的频率分量。
非线性系统：由于非线性特性对所传输信号产生非线性失真。非线性失真可能产生新的频率分量。

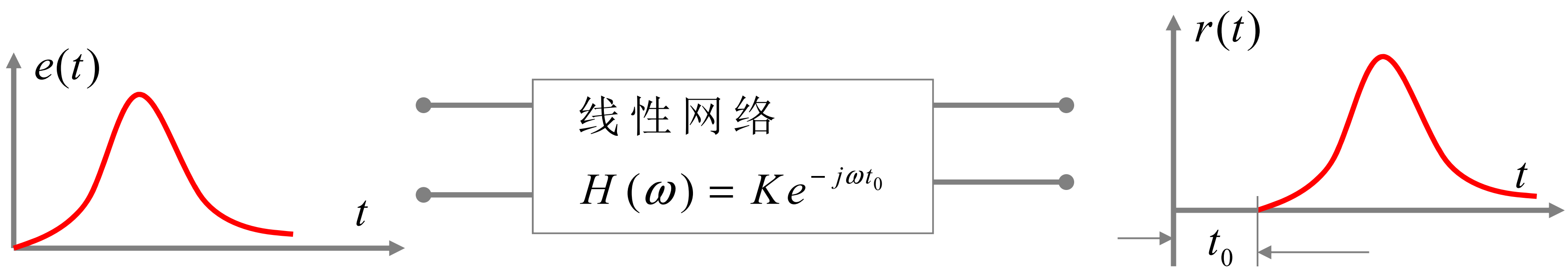
信号的失真有正反两方面：
（1）如果有意识地利用系统进行波形变换，则要求信号经系统必然产生失真。
（2）如果要进行原信号的传输，则要求传输过程中信号失真最小，即要研究无失真传输的条件。

无失真传输

- 无失真传输概念（时域波形不变）

$$\text{响应信号} \xrightarrow[\text{大小和出现时间不同}]{\text{而波形不变}} \text{激励信号}$$

即 $r(t) = Ke(t - t_0)$



K是一常数，t_0为滞后时间。

满足无失真条件时，$r(t)$波形是$e(t)$波形经t_0时间的滞后。

无失真传输

- 无失真传输条件

(1) 无失真传输条件（频域）

$$r(t)=Ke(t-t_0)$$

$$H(\omega)=\frac{R(\omega)}{E(\omega)}=Ke^{-j\omega t_0}$$

$$\begin{cases}|H(\omega)|=K\\ \varphi(\omega)=-\omega t_0\end{cases}$$

无失真传输的条件：

（1）系统的频率响应特性是常数K；

（2）相位特性是通过原点的直线，即群延时 $\tau=-\dfrac{d\varphi(\omega)}{d\omega}$ 为常数。

无失真传输

- 无失真传输条件

(2) 无失真传输条件（时域）

$$r(t) = Ke(t - t_0)$$

$$h(t) = K\delta(t - t_0)$$

无失真传输的条件：

系统的冲激响应，仍为冲激函数。

无失真传输

- 无失真传输条件

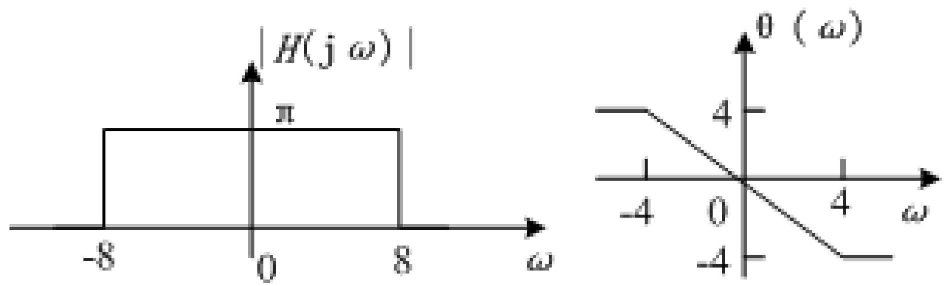
系统的幅频特性 $|H(jw)|$ 和相频特性如图（a），（b）所示，则下列信号通过该系统时，不产生失真的是（　　）

A. $f(t)=\cos(t)+\cos(8t)$

B. $f(t)=\sin(t)+\sin(3t)$

C. $f(t)=\sin(2t)\sin(3t)$

D. $f(t)=\cos^2(3t)$



(a)　　(b)

3.8 无失真传输

无失真传输

- 无失真传输条件

理想不失真传输系统的传输函数 $H(j\omega)$ 是

A. $Ke^{-j\omega_0 t}$ ；　B. $Ke^{-j\omega t_0}$ ；　C. $Ke^{-j\omega t_0}\left[u(\omega+\omega_c)-u(\omega-\omega_c)\right]$ ；　D. $Ke^{-j\omega_0 t_0}$

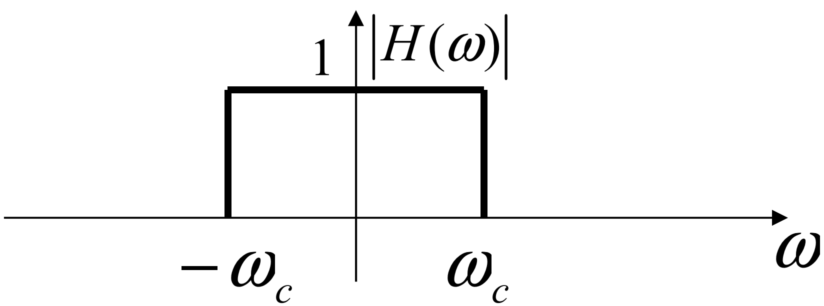
（K 、ω_0、t_0 为常数）

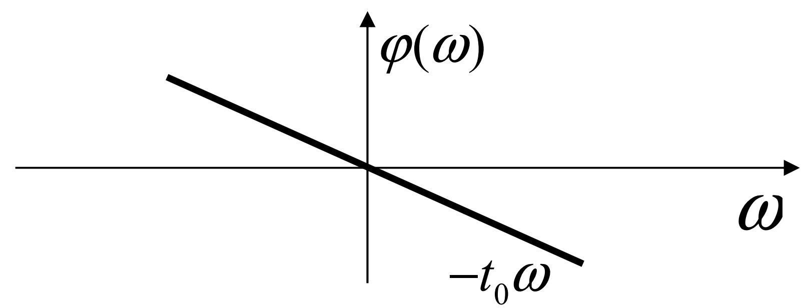
3.9 理想低通滤波器

■ 理想低通滤波器频域特性

- 理想低通滤波器

具备**矩形幅度**特性和**线性相移**特性。





频域特性：低于ω_c的所有信号——无失真传送；

高于ω_c的所有信号——完全衰减；

相移特性也满足无任何失真传输的要求。

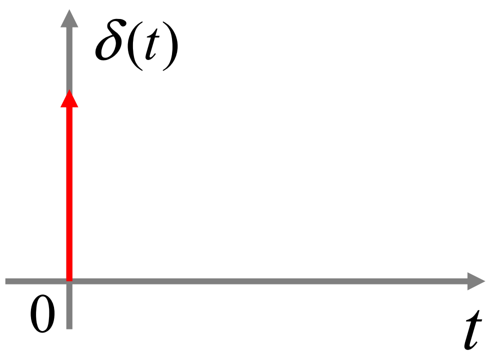
即$|H(j\omega)| = u(\omega+\omega_c) - u(\omega+\omega_c)$,

$\varphi(\omega) = -t_0\omega$ （ω_c称截止频率）

3.9 理想低通滤波器

■ 理想低通滤波器频域特性

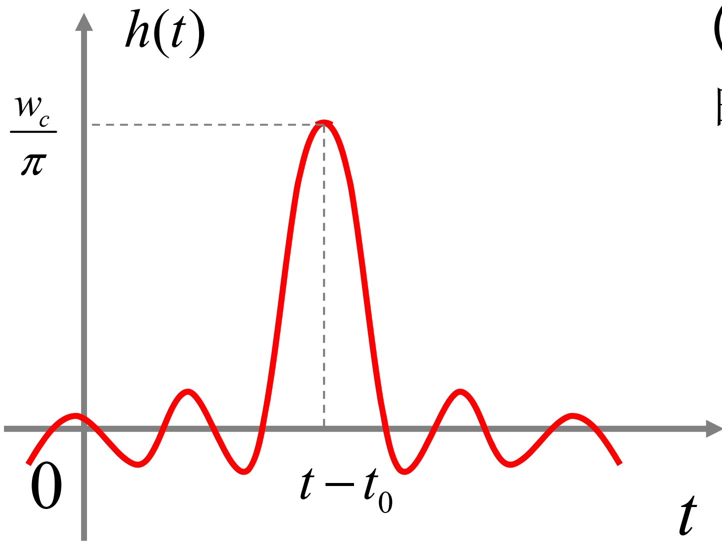
- 理想低通滤波器的冲激响应



$$h(t)=\mathscr{F}^{-1}[H(\omega)]=\frac{\omega_c}{\pi}\mathrm{Sa}[\omega_c(t-t_0)]$$

(1) 对比输入信号和响应，失真严重。

(2) 理想低通滤波器是物理上不可实现的非因果系统。



3.9 理想低通滤波器

■ 理想低通滤波器频域特性

- 理想低通滤波器的阶跃响应

如果具有跃变不连续点的信号通过低通滤波器传输,
则不连续点在输出将被圆滑, 产生渐变.
因为信号随时间信号的急剧改变, 意味着包含许多高频分量,
而较平坦的信号则主要包含低频分量,
低通滤波器滤除了一些高频分量.

3.9 理想低通滤波器

■ 理想低通滤波器频域特性

- 理想低通滤波器的阶跃响应

理想低通滤波器的频率特性：

$$H(\omega)=\begin{cases} e^{-j\omega t_0} & -\omega_c<\omega<\omega_c \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

阶跃信号的傅里叶变换：

$$E(\omega)=\mathscr{F}[u(t)]=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$$

$$\therefore R(\omega)=H(\omega)E(\omega)=[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}]e^{-j\omega t_0} \qquad (-\omega_c<\omega<\omega_c)$$

$$\therefore r(t)=\mathscr{F}^{-1}[R(\omega)]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}]e^{-j\omega t_0}e^{j\omega t}d\omega \quad =\frac{1}{2}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}\frac{e^{j\omega(t-t_0)}}{j\omega}d\omega$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}\frac{\cos\omega(t-t_0)}{j\omega}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}\frac{\sin\omega(t-t_0)}{\omega}d\omega$$

$$\boxed{x=\omega(t-t_0)}$$

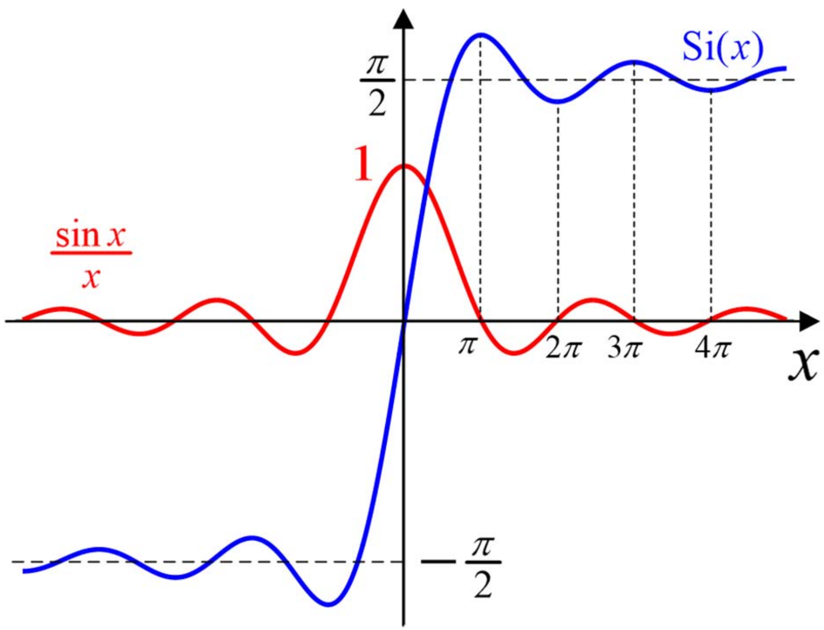
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\omega_c(t-t_0)}\frac{\sin x}{x}dx \quad =\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\mathrm{Si}[\omega_c(t-t_0)]$$

$$\boxed{\mathrm{Si}(y)=\int_0^y\frac{\sin x}{x}dx}$$

3.9 理想低通滤波器

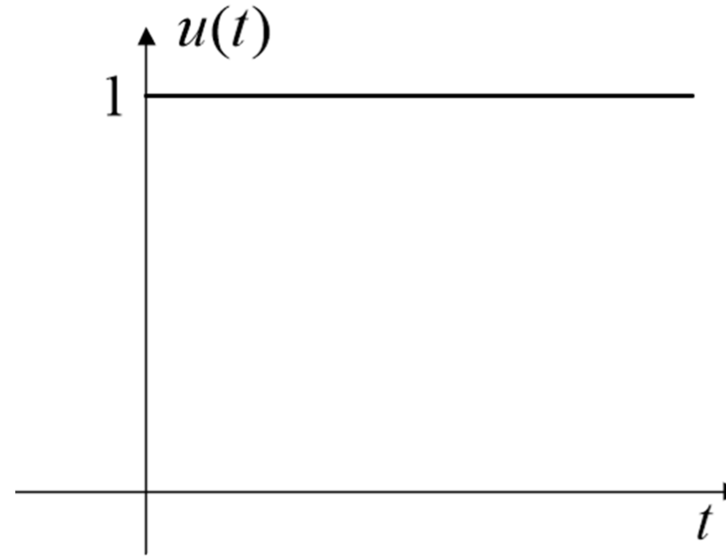
理想低通滤波器频域特性

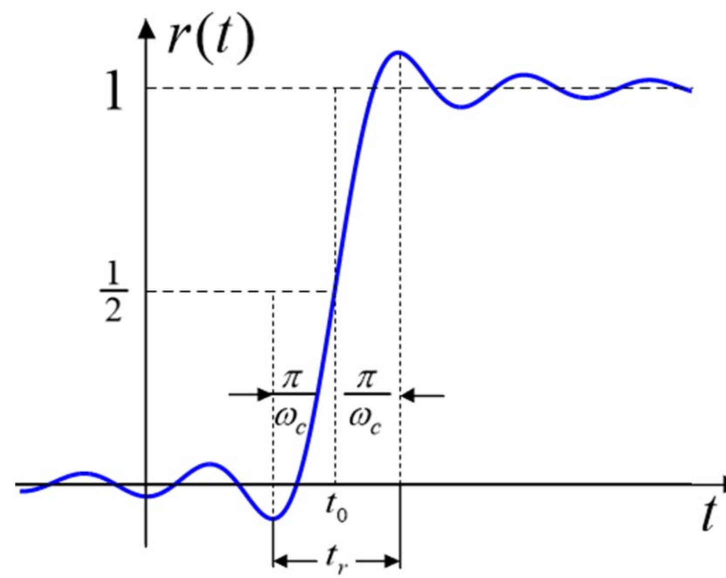
- 理想低通滤波器的阶跃响应



$$\mathrm{Si}(y)=\int_0^y \frac{\sin x}{x}dx$$

$$r(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\mathrm{Si}[\omega_c(t-t_0)]$$



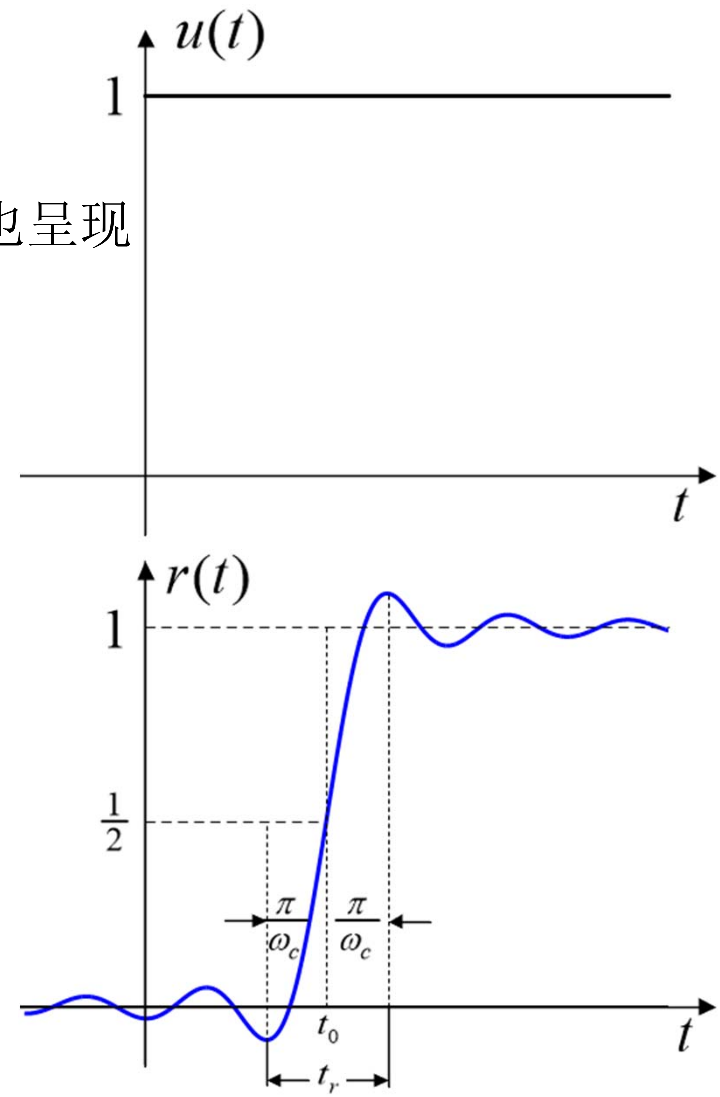


3.9 理想低通滤波器

■ 理想低通滤波器频域特性

- 理想低通滤波器的阶跃响应

阶跃信号$u(t)$:作用于理想低通滤波器时,在输出端也呈现逐渐上升的波形,不再像输入信号那样急剧上升.



通过求阶跃响应,可以发现:

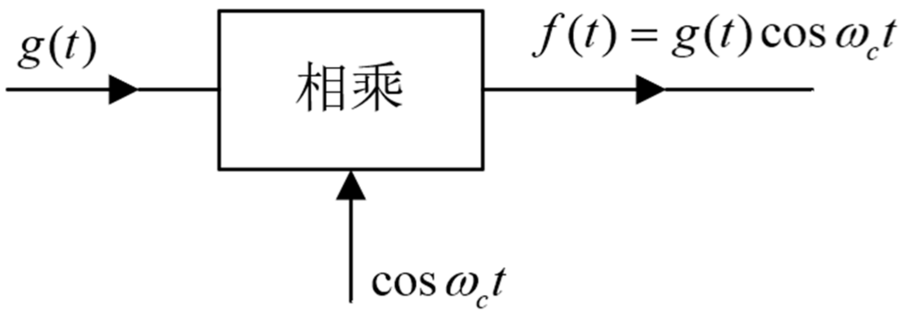
响应由最小值升至最大值所需时间$t_r=\dfrac{2\pi}{\omega_c}=\dfrac{1}{B}$

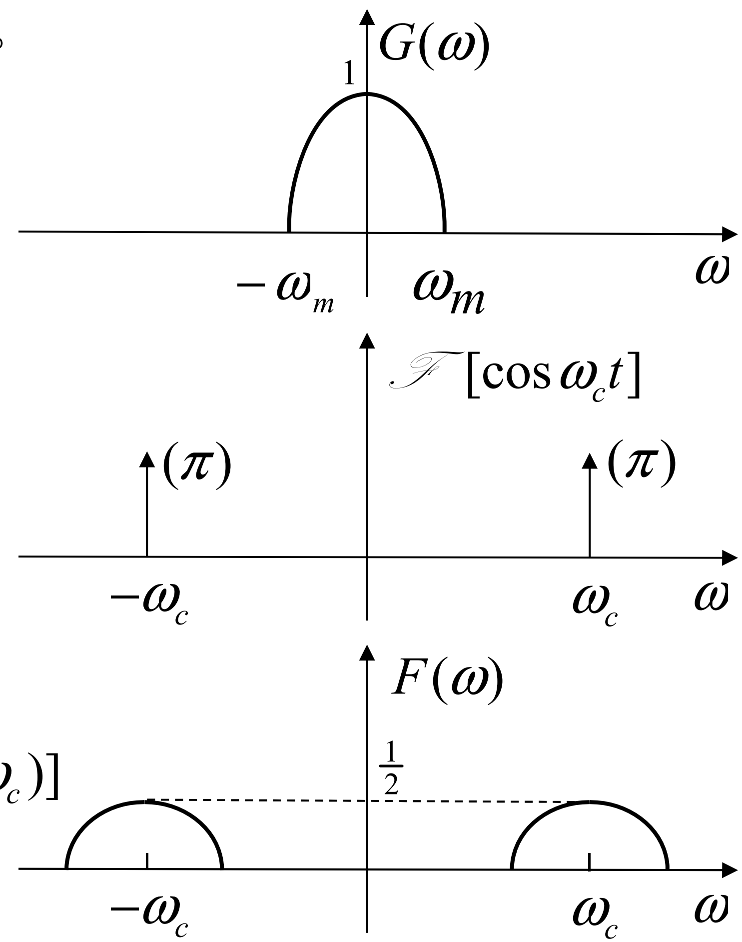
上升时间和滤波器截止频率或带宽成反比.

截止频率越低,在输出端信号上升越缓慢.

调制

将信号频谱搬移到所需的较高频率范围。





$g(t)\leftrightarrow G(\omega)$

$\cos\omega_c t\leftrightarrow \pi[\delta(\omega+\omega_c)+\delta(\omega-\omega_c)]$

$\because f(t)=g(t)\cos\omega_c t$

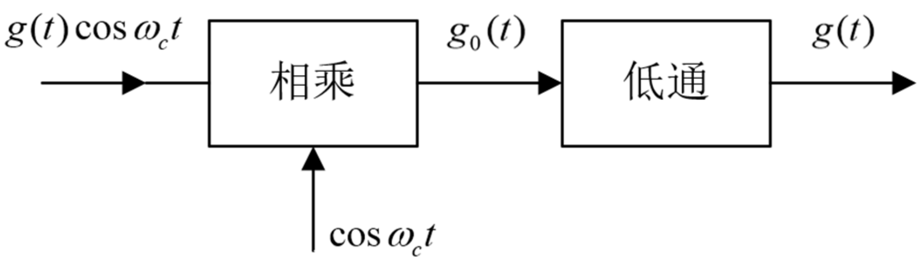
$$\therefore F(\omega)=\frac{1}{2\pi}G(\omega)*[\pi\delta(\omega+\omega_c)+\pi\delta(\omega-\omega_c)]$$

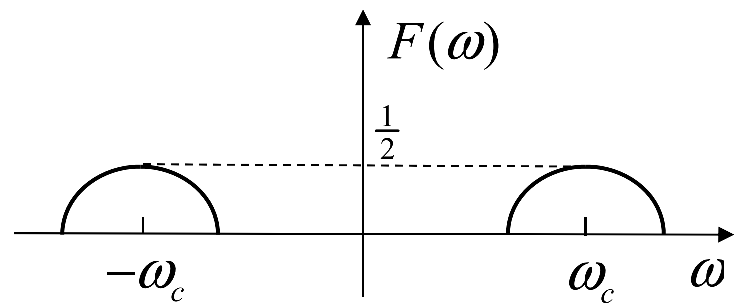
$$=\frac{1}{2}[G(\omega+\omega_c)+G(\omega-\omega_c)]$$

3.10 调制和解调

■ 解调

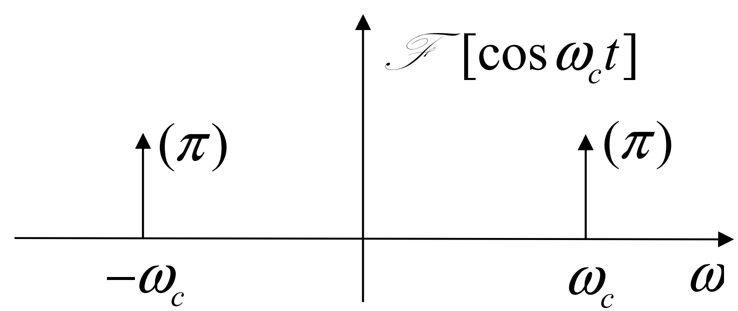
由已调信号 $f(t)$ 恢复基带信号 $g(t)$ 。





$$\because g_0(t)=[g(t)\cos\omega_c t]\cos\omega_c t$$

$$=\tfrac{1}{2}g(t)+\tfrac{1}{2}g(t)\cos(2\omega_c t)$$



$$\therefore G_0(\omega)=\frac{1}{2}G(\omega)+\frac{1}{4}[G(\omega+2\omega_c)+G(\omega-2\omega_c)]$$