《信号与系统》

第2章 连续时间系统的时域分析

吉小鹏

E-mail: 003163@nuist.edu.cn

南京信息工程大学 电子与信息工程学院 尚贤楼207

线性时不变 (LTI)系统，包括**连续时间系统**与**离散时间系统**。**连续时间系统**，通常用微分方程来描述。

LTI的系统分析方法包括**时间域**和变换域两类。**时域分析法**不通过任何变换，直接求解系统的微分方程。系统的分析计算全部在时间变量领域内进行。这种方法直观，物理概念清楚，是学习各种变换域分析方法的基础。

本章将在用**经典法求解微分方程**的基础上，讨论**零输入响应**，特别是**零状态响应**的求解。在引入系统的**冲激响应**之后，零状态响应等于冲激响应与激励的卷积积分，最后介绍**卷积积分**的性质。

提纲

2.1 连续时间系统时域分析的基本方法

■ 微分方程的建立

- 数学模型：描述系统工作特性的微分方程。

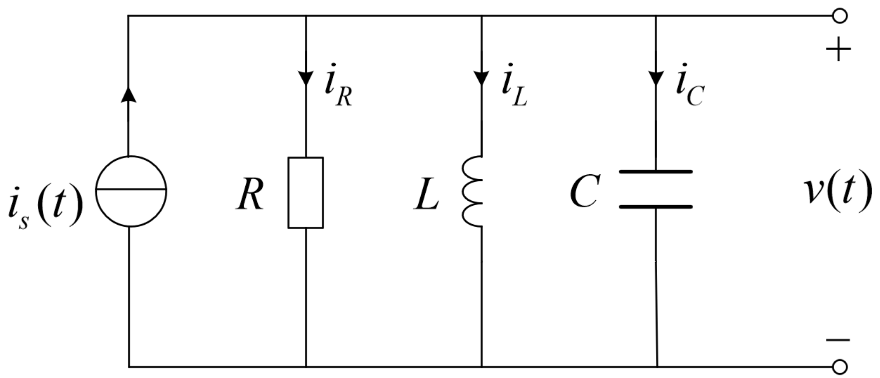
■ 电路系统

根据电路网络的约束特性列写微分方程：

- 元件约束：表征电路元件模型的关系式，如伏安关系等。
- 网络拓扑约束：网络结构决定的电流、电压间的约束关系，如基尔霍夫电压和电流定律。

微分方程的建立

例：如右图所示的RLC并联电路，给定激励信号为电流源 $i_s(t)$，求并联电路的端电压$v(t)$。



解：

元件约束：$$i_R(t)=\frac{1}{R}v(t)$$

$$i_L(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}v(\tau)d\tau$$

$$i_C(t)=C\frac{d}{dt}v(t)$$

拓扑约束(KCL):

$$i_R(t)+i_L(t)+i_C(t)=i_s(t)$$

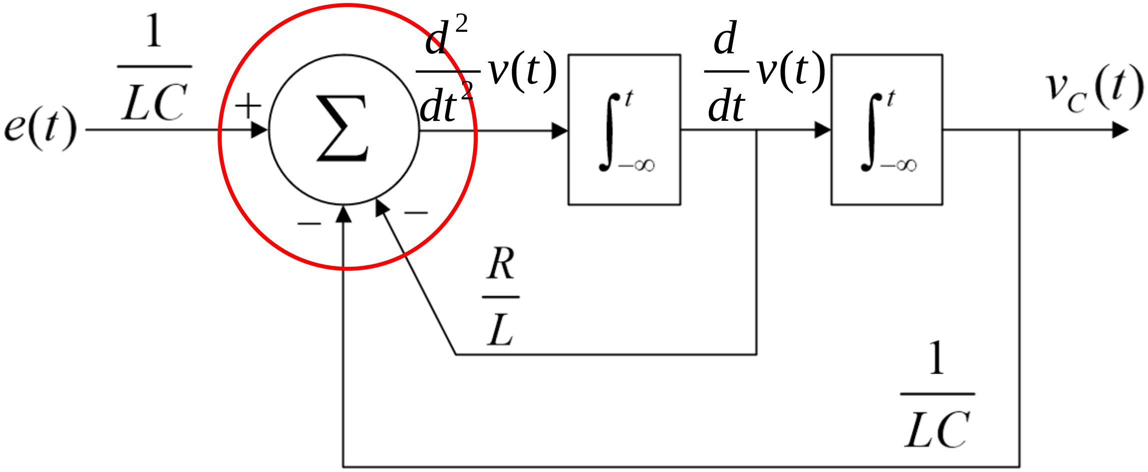
即：

$$C\frac{d^2}{dt^2}v(t)+\frac{1}{R}\frac{d}{dt}v(t)+\frac{1}{L}v(t)=\frac{d}{dt}i_s(t)$$

■ 微分方程的建立

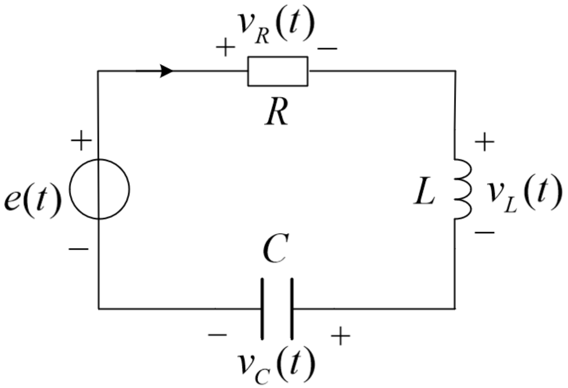
例：根据所示系统的系统框图写出方程。

解：



$$\frac{d^2v_C(t)}{dt^2}=-\frac{R}{L}\frac{dv_C(t)}{dt}-\frac{1}{LC}v_C(t)+\frac{1}{LC}e(t)$$

$$\frac{d^2v_C(t)}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dv_C(t)}{dt}+\frac{1}{LC}v_C(t)=\frac{1}{LC}e(t)$$



微分方程的建立

- 一般而言，如果**单输入-单输出系统**的激励为e(t)，响应为r(t)，则描述**LTI连续系统**的激励和响应之间关系的数学模型是n阶**常系数**线性微分方程，

$$r^{(n)}(t)+a_{n-1}r^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1r^{(1)}(t)+a_0r(t)=$$
$$b_me^{(m)}(t)+b_{m-1}e^{(m-1)}(t)+\cdots+b_1e^{(1)}(t)+b_0e(t)$$

即： $$\sum_{i=0}^{n}a_ir^{(i)}(t)=\sum_{j=0}^{m}b_je^{(j)}(t)$$

其中，$a_i(i=0,1,\ldots,n)$，$b_j(j=0,1,\ldots,m)$均为常数，且$a_n=1$。

微分方程的经典解

- 微分方程的**完全解**r(t)由**齐次解**$r_h(t)$和**特解**$r_p(t)$组成，即

$$r(t)=r_h(t)+r_p(t)$$

(1) 齐次解

齐次解是齐次微分方程

$$r^{(n)}(t)+a_{n-1}r^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1r^{(1)}(t)+a_0r(t)=0$$

的解，它是形如 $Ce^{\lambda t}$ 的一些函数的线性组合。λ 为特征方程的根（特征根）。

特征根： **特征方程** $\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0$ 的**n个根** $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 称为微分方程的特征根。

齐次解$r_h(t)$的函数形式**由特征根决定**。

微分方程的经典解

(1) 齐次解

特征根	齐次解
单实根 λ	$Ce^{\lambda t}$
m重实根 λ	$(C_{m-1}t^{m-1}+C_{m-2}t^{m-2}+\cdots+C_1 t+C_0)e^{\lambda t}$
一对共轭复根 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm j\beta$	$e^{\alpha t}[C\cos(\beta t)+D\sin(\beta t)]$ 或 $Ae^{\alpha t}\cos(\beta t-\theta)$,其中$Ae^{j\theta}=C+jD$
m重共轭复根	$A_{m-1}t^{m-1}e^{\alpha t}\cos(\beta t-\theta_{r-1})+A_{m-2}t^{m-2}e^{\alpha t}$ $\cos(\beta t-\theta_{r-2})+\cdots+A_0 e^{\alpha t}\cos(\beta t-\theta_0)$

其中，C，C_i， D_i， A_i， θ_i 等为待定系数。

2.1 连续时间系统时域分析的基本方法

微分方程的经典解

(1) 齐次解

例：求如下所示系统微分方程得齐次解。

$$\frac{d^2}{dt^2}r(t)+3\frac{d}{dt}r(t)+2r(t)=\frac{d}{dt}e(t)+4e(t)$$

解：

系统的特征方程为 $\lambda^2+3\lambda+2=0$

$$(\lambda+1)(\lambda+2)=0$$

特征根：$\lambda_1=-1,\lambda_2=-2$

因而对应的齐次解为

$$r_h(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-2t}$$

2.1 连续时间系统时域分析的基本方法

■ 微分方程的经典解

(1) 齐次解

课堂练习：求如下所示系统微分方程得齐次解。

$$\frac{d^3}{dt^3}r(t)+7\frac{d^2}{dt^2}r(t)+16\frac{d}{dt}r(t)+12r(t)=e(t)$$

解：

系统的特征方程为 $\lambda^3+7\lambda^2+16\lambda+12=0$

$$(\lambda+2)^2(\lambda+3)=0$$

特征根：$\lambda_1=-2$（2重根）,$\lambda_2=-3$

因而对应的齐次解为

$$r_h(t)=(A_1t+A_2)e^{-2t}+A_3e^{-3t}$$

微分方程的经典解

(2) 特解

特解的函数形式与激励的函数形式有关。根据激励选定特解后，将它带入到原微分方程，求出各待定系数，就可得出方程的特解。P51

激励函数e(t)	响应函数r(t)的特解
E(常数)	B(常数)
t^p	$B_1 t^p + B_2 t^{p-1} + \cdots + B_p t + B_{p+1}$
$e^{\alpha t}$	$Be^{\alpha t}$
$\cos(\omega t)$ $\sin(\omega t)$	$B_1\cos(\omega t) + B_2\sin(\omega t)$
$t^p e^{\alpha t}\sin(\omega t)$ $t^p e^{\alpha t}\cos(\omega t)$	$(B_1 t^p + B_2 t^{p-1} + \cdots + B_p t + B_{p+1})e^{\alpha t}\cos(\omega t)$ $+(D_1 t^p + D_2 t^{p-1} + \cdots + D_p t + D_{p+1})e^{\alpha t}\sin(\omega t)$

■ 微分方程的经典解

(2) 特解

例：系统微分方程及激励信号如下，求系统特解。

$$\frac{d^2}{dt^2}r(t)+3\frac{d}{dt}r(t)+2r(t)=4e(t),\quad e(t)=e^{-3t}u(t)$$

解：

设特解 $r_p(t)=Be^{-3t}$

代入原方程得：$9Be^{-3t}-9Be^{-3t}+2Be^{-3t}=4e^{-3t} \quad \Rightarrow B=2$

所以，特解为 $r_p(t)=2e^{-3t}$

微分方程的经典解

(2) 特解

课堂练习：系统微分方程及激励信号如下，求系统特解。

$$\frac{d^2}{dt^2}r(t)+3\frac{d}{dt}r(t)+2r(t)=\frac{d}{dt}e(t)+4e(t),\quad e(t)=t^2$$

解：

设特解 $r_p(t)=B_1t^2+B_2t+B_3$

代入原方程得：$2B_1t^2+(6B_1+2B_2)t+(2B_1+3B_2+2B_3)=4t^2+2t$

$$\begin{cases}2B_1=4\\6B_1+2B_2=2\\2B_1+3B_2+2B_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B_1=2\\B_2=-5\\B_3=\frac{11}{2}\end{cases}$$

所以，特解为 $r_p(t)=2t^2-5t+\dfrac{11}{2}$

微分方程的经典解

(3) 完全解

线性常系数微分方程的完全解是齐次解和特解之和。

如果微分方程的特征根λ_i 均为单实根，则全解为：

$$r(t)=r_h(t)+r_p(t)=\sum_{i=1}^{n}C_i e^{\lambda_i t}+r_p(t)$$

待定系数的求法：一般n阶微分方程，利用已知的n个初始条件 $r(0),r^{(1)}(0),r^{(2)}(0),\cdots,r^{(n-1)}(0)$，就可求出全部的待定系数。设e(t)在t=0时接入，则全解适合于区间$[0_+,\infty)$ 。

微分方程的经典解

例： 描述某LTI系统的微分方程为 $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=f(t)$，求输入 $f(t)=2e^{-t}, t\geq 0, y(0)=2, y'(0)=-1$ 时的完全解。

解：

(1) 齐次解$y_h(t)$

齐次解是齐次微分方程 $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=0$ 的解。

特征方程为 $\lambda^2+5\lambda+6=0$,

特征根 $\lambda_1=-2, \lambda_2=-3$，均为单实根。

$$\therefore y_h(t)=C_1e^{-2t}+C_2e^{-3t}$$

■ 微分方程的经典解

例： 描述某LTI系统的微分方程为 $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=f(t)$，求输入 $f(t)=2e^{-t}, t\geq 0, y(0)=2, y'(0)=-1$ 时的完全解。

解：

(2) 特解$y_p(t)$

设 $y_p(t)=Pe^{-t}$，代入原方程，得

$$Pe^{-t}-5Pe^{-t}+6Pe^{-t}=2e^{-t}$$

解得：$P=1$

$$\boxed{\therefore y_p(t)=e^{-t}}$$

2.1 连续时间系统时域分析的基本方法

■ 微分方程的经典解

例： 描述某LTI系统的微分方程为 $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=f(t)$，求输入 $f(t)=2e^{-t}, t\geq 0, y(0)=2, y'(0)=-1$ 时的完全解。

解：

(3) 完全解y(t)

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t)=C_1e^{-2t}+C_2e^{-3t}+e^{-t}$$

确定待定系数：将 $y(0)=2, y'(0)=-1$ 代入

$$\begin{cases} y(t)=C_1e^{-2t}+C_2e^{-3t}+e^{-t} \\ y'(t)=-2C_1e^{-2t}-3C_2e^{-3t}-e^{-t} \end{cases}$$

得：
$$\begin{cases} y(0)=C_1+C_2+1=2 \\ y'(0)=-2C_1-3C_2-1=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=3 \\ C_2=-2 \end{cases}$$

2.1 连续时间系统时域分析的基本方法

■ 微分方程的经典解

例：描述某LTI系统的微分方程为 $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=f(t)$，求输入 $f(t)=2e^{-t}, t\ge 0, y(0)=2, y'(0)=-1$ 时的完全解。

解：

完全解：$$y(t)=\underbrace{3e^{-2t}-2e^{-3t}}_{\text{齐次解}}+\underbrace{e^{-t}}_{\text{特解}} \qquad t\ge 0$$

自由响应　强迫响应

可见，齐次解的函数形式仅仅依赖于系统本身的特性，而与激励的函数形式无关，称为系统的*<u>自由响应或固有响应</u>*。特征方程的根称为系统的“*<u>固有频率</u>*”，它决定了系统自由响应的形式。特解的形式由激励信号确定，称为*<u>强迫响应</u>*。

微分方程的经典解

课堂练习：描述某LTI系统的微分方程为 $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=f(t)$，求输入 $f(t)=10\cos t, t\geq 0, y(0)=2, y'(0)=0$ 时的完全解。

解：

(1) 齐次解$y_h(t)$

齐次解是齐次微分方程 $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=0$ 的解。

特征方程为 $\lambda^2+5\lambda+6=0$,

特征根$\lambda_1=-2, \lambda_2=-3$，均为单实根。

$$\boxed{\therefore y_h(t)=C_1e^{-2t}+C_2e^{-3t}}$$

微分方程的经典解

课堂练习： 描述某LTI系统的微分方程为$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=f(t)$，求输入 $f(t)=10\cos t, t\geq 0, y(0)=2, y'(0)=0$ 时的完全解。

解：

(2) 特解$y_p(t)$

设特解 $y_p(t)=P\cos t+Q\sin t$，代入原方程，得

$$(-P+5Q+6P)\cos t+(-Q-5P+6Q)\sin t=10\cos t$$

$$\begin{cases}5P+5Q=10\\-5P+5Q=0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}P=1\\Q=1\end{cases}$$

$$\therefore y_p(t)=\cos t+\sin t=\sqrt{2}\cos(t-\tfrac{\pi}{4})$$

■ 微分方程的经典解

课堂练习： 描述某LTI系统的微分方程为 $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=f(t)$，求输入 $f(t)=10\cos t, t\ge 0, y(0)=2, y'(0)=0$ 时的完全解。

解：

完全解为：$y(t)=y_h(t)+y_p(t)=C_1e^{-2t}+C_2e^{-3t}+\sqrt{2}\cos(t-\frac{\pi}{4})$

确定待定系数：

$$\begin{cases} y(t)=C_1e^{-2t}+C_2e^{-3t}+\sqrt{2}\cos(t-\frac{\pi}{4}) \\ y'(t)=-2C_1e^{-2t}-3C_2e^{-3t}-\sqrt{2}\sin(t-\frac{\pi}{4}) \end{cases}$$

将 $y(0)=2, y'(0)=0$ 代入

$$\begin{cases} y(0)=C_1+C_2+1=2 \\ y'(0)=-2C_1-3C_2+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=2 \\ C_2=-1 \end{cases}$$

■ 微分方程的经典解

课堂练习：描述某……程为$y''(t)+5y'$……

输入 $f(t)=10\cos$……$)=0$ 时的完全……

值随t的增大而逐渐消失。

值随t的增大呈现等幅震荡。一般为阶跃函数或周期函数。

解：

$$y(t)=\overbrace{\underbrace{2e^{-2t}-e^{-3t}}_{\text{自由响应}}}^{\text{瞬态响应}}+\overbrace{\underbrace{\sqrt{2}\cos\left(t-\tfrac{\pi}{4}\right)}_{\text{强迫响应}}}^{\text{稳态响应}}\text{，}\quad t\geq 0$$

*** 一般输入为有始周期信号或阶跃信号且特征根有负实部时，稳定系统的全响应可分为瞬态响应和稳态响应两部分。**

2.1 连续时间系统时域分析的基本方法

■ 微分方程的经典解

关于t=0时刻的系统状态：

由于激励信号的作用，系统响应及其各阶导数有可能在t=0时刻发生突变。

为了区分跳变前后的状态，用0-表示激励接入之前的瞬时，0+表示激励接入之后的瞬时。

思考：例题中为了确定待定系数所使用的y(0),y'(0)等，是0-时刻还是0+时刻的值呢？

0+时刻的值

2.1 连续时间系统时域分析的基本方法

■ 微分方程的经典解

关于t=0时刻的系统状态：

在系统分析中，我们从系统中直接获得的初始条件往往是0-时刻的值

它们提供了以往历史的全部信息而与激励无关

思考：

如何从0-时刻的值求出0+时刻的值？？？

$$y^{(n)}(0-) \rightarrow y^{(n)}(0+)$$

2.1 连续时间系统时域分析的基本方法

■ 微分方程的经典解

关于t=0时刻的系统状态：

如何从 $y^{(j)}(0_-)$ 求出 $y^{(j)}(0_+)$ 呢？

就要考虑：$y^{(j)}(t)$ 即：$y(t),\ y'(t), y''(t),\cdots$

在 $t=0$ 时刻是否连续或者说有没有跳变；

若无跳变，0_+ 时刻的值与 0_- 时刻的值相同；

$$y(0_+)=y(0_-) \qquad y'(0_+)=y'(0_-) \qquad \cdots$$

若有跳变，0_+ 时刻的值与 0_- 时刻的值不同，应想办法求出跳变量。

2.1 连续时间系统时域分析的基本方法

- 微分方程的经典解

关于t=0时刻的系统状态：

当系统用微分方程表示时，系统的响应 $y(t)$ 及其各阶导数在t=0 是否有跳变决定于微分方程右端是否包含单位冲激函数$\delta(t)$及其各阶导数。

如果微分方程右端不含冲激函数及其各阶导数，响应$y(t)$及其各阶导数在t=0是连续的，其 0_+ 值等于 0_- 值。

如果微分方程右端含有冲激函数及其各阶导数，响应 $y(t)$ 或其各阶导数在t=0将有跳变，其跳变量可用*冲激函数匹配法*求得。

匹配原理：t=0时刻微分方程两端冲激函数及其各阶导数应该平衡相等。

■ 微分方程的经典解

关于t=0时刻的系统状态：

例：$\frac{d}{dt}r(t)+3r(t)=3\delta'(t)$，已知$r(0-)$，求 $r(0+)$ 。

$$3\delta'(t)\to 3\delta$$

$$\downarrow\times 3$$

$$-9\delta(t)\leftarrow 9\delta(t)$$

$$\downarrow\to -9\Delta u(t)$$

$$r(0+)-r(0-)=-9$$

$$r(0+)=r(0-)-9$$

微分方程的经典解

对于一般的线性时不变系统微分方程

$$C_0\frac{d^n r(t)}{dt^n}+C_1\frac{d^{n-1}r(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+C_{n-1}\frac{d^1 r(t)}{dt^1}+C_n r(t)$$
$$=E_0\frac{d^m\delta(t)}{dt^m}+E_1\frac{d^{m-1}\delta(t)}{dt^{m-1}}+\cdots+E_{m-1}\frac{d^1\delta(t)}{dt^1}+E_m\delta(t)+f(t)$$

$$\begin{cases} r(0_+)-r(0_-)=A_{n-1}\\ r^{(1)}(0_+)-r^{(1)}(0_-)=A_{n-2}\\ r^{(2)}(0_+)-r^{(2)}(0_-)=A_{n-3}\\ \vdots\\ r^{(n-1)}(0_+)-r^{(n-1)}(0_-)=A_0\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \boxed{r^{(n)}(t)=A_m\delta^{(m)}(t)+A_{m-1}\delta^{(m-1)}(t)+\cdots+A_1\delta^{(1)}(t)+A_0\delta(t)+f_n(t)}\\ r^{(n-1)}(t)=A_m\delta^{(m-1)}(t)+A_{m-1}\delta^{(m-2)}(t)+\cdots+A_1\delta(t)+A_0\Delta u(t)+f_{n-1}(t)\\ \vdots\\ r^{(1)}(t)=A_m\delta^{(m-n+1)}(t)+A_{m-1}\delta^{(m-n)}(t)+\cdots+A_n\delta^{(1)}(t)+A_{n-1}\delta(t)+A_{n-2}\Delta u(t)+f_1(t)\\ r(t)=A_m\delta^{(m-n)}(t)+A_{m-1}\delta^{(m-n-1)}(t)+\cdots+A_{n+1}\delta^{(1)}(t)+A_n\delta(t)+A_{n-1}\Delta u(t)+f_0(t)\end{cases}$$

2.1 连续时间系统时域分析的基本方法

微分方程的经典解

$$
\begin{array}{l}
C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ C_{n-1} \\ C_n
\end{array}
\begin{cases}
r^{(n)}(t)=A_m\delta^{(m)}(t)+A_{m-1}\delta^{(m-1)}(t)+\cdots+A_1\delta^{(1)}(t)+A_0\delta(t)+f_n(t) \\
r^{(n-1)}(t)=A_m\delta^{(m-1)}(t)+A_{m-1}\delta^{(m-2)}(t)+\cdots+A_1\delta(t)+A_0\Delta u(t)+f_{n-1}(t) \\
\vdots \\
r^{(1)}(t)=A_m\delta^{(m-n+1)}(t)+A_{m-1}\delta^{(m-n)}(t)+\cdots+A_n\delta^{(1)}(t)+A_{n-1}\delta(t)+A_{n-2}\Delta u(t)+f_1(t) \\
r(t)=A_m\delta^{(m-n)}(t)+A_{m-1}\delta^{(m-n-1)}(t)+\cdots+A_{n+1}\delta^{(1)}(t)+A_n\delta(t)+A_{n-1}\Delta u(t)+f_0(t)
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
C_0A_m=E_0 \\
C_0A_{m-1}+C_1A_m=E_1 \\
C_0A_{m-2}+C_1A_{m-1}+C_2A_m=E_2 \\
\vdots \\
C_0A_0+C_1A_1+\cdots+C_{n-1}A_{n-1}+C_nA_n=E_m
\end{cases}
$$

$$
C_0\frac{d^nr(t)}{dt^n}+C_1\frac{d^{n-1}r(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+C_{n-1}\frac{d^1r(t)}{dt^1}+C_nr(t)
$$

$$
=E_0\frac{d^m\delta(t)}{dt^m}+E_1\frac{d^{m-1}\delta(t)}{dt^{m-1}}+\cdots+E_{m-1}\frac{d^1\delta(t)}{dt^1}+E_m\delta(t)+f(t)
$$

2.1 连续时间系统时域分析的基本方法

■ 微分方程的经典解

例： 已知微分方程为 $r''(t)+3r'(t)+2r(t)=\delta''(t)+2\delta'(t)+3\delta(t)$

其起始状态 $r(0\_)=1, r'(0\_)=-1$，求0+时刻系统的初始状态。

解：

设 $$r''(t)=A_2\delta''(t)+A_1\delta'(t)+A_0\delta(t)+f_2(t)$$

则有：
$$r'(t)=A_2\delta'(t)+A_1\delta(t)+A_0\Delta u(t)+f_1(t)$$
$$r(t)=A_2\delta(t)+A_1\Delta u(t)+f_0(t)$$

代入原方程，由冲击平衡法得：

$$\begin{cases} A_2=1 \\ A_1+3A_2=2 \\ A_0+3A_1+2A_2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_2=1 \\ A_1=-1 \\ A_0=4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r(0_+)=r(0\_)+A_1=0 \\ r'(0_+)=r'(0\_)+A_0=3 \end{cases}$$

2.1 连续时间系统时域分析的基本方法

微分方程的经典解

课堂练习： 已知微分方程为 $y''(t)+2y'(t)+y(t)=f''(t)+2f(t)$，

已知 $f(t)=\delta(t), y(0_-)=1, y'(0_-)=-1$，求0+时刻系统的初始状态。

解：

将 $f(t)=\delta(t)$ 代入微分方程得：$y''(t)+2y'(t)+y(t)=\delta''(t)+2\delta(t)$

设 $$y''(t)=A_2\delta''(t)+A_1\delta'(t)+A_0\delta(t)+f_2(t)$$

则有：
$$y'(t)=A_2\delta'(t)+A_1\delta(t)+A_0\Delta u(t)+f_1(t)$$
$$y(t)=A_2\delta(t)+A_1\Delta u(t)+f_0(t)$$

$$\begin{cases} A_2=1 \\ A_1+2A_2=0 \\ A_0+2A_1+A_2=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_2=1 \\ A_1=-2 \\ A_0=5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y(0_+)=y(0_-)+A_1=-1 \\ y'(0_+)=y'(0_-)+A_0=4 \end{cases}$$

冲激函数匹配法的一般步骤：（以二阶系统为例）

（1）将输入代入微分方程。

（2）令：$y''(t)=a\delta''(t)+b\delta'(t)+c\delta(t)+r_0(t)$ 对其逐次积分，求得 $y'(t), y(t)$。

（3）将 $y''(t), y'(t), y(t)$ 代入微分方程。根据方程等号两端冲击函数及其各阶导数的系数相等，从而求得各个系数a,b,c。

（4）其中 $y'(t)$ 表达式中$\Delta u(t)$前面的系数大小即为 $y'(t)$ 在t=0的跳变量，而 $y(t)$ 表达式中$\Delta u(t)$前面的系数大小即为在t=0的 $y(t)$ 跳变量。

2.2 零输入响应与零状态响应

■ 双零法（零输入+零状态）

- 零输入响应：没有外加激励信号作用，只由起始状态所产生的响应 $r_{zi}(t)$
- 零状态响应：起始状态等于零，由系统外加激励信号所产生的响应 $r_{zs}(t)$

LTI系统方程：

$$C_0 r^{(n)}(t)+C_1 r^{(n-1)}(t)+\cdots+C_{n-1}r^{(1)}(t)+C_n r(t)=$$
$$E_0 e^{(m)}(t)+E_1 e^{(m-1)}(t)+\cdots+E_{m-1}e^{(1)}(t)+E_m e(t)$$

零输入响应：

$$C_0 r_{zi}{}^{(n)}(t)+C_1 r_{zi}{}^{(n-1)}(t)+\cdots+C_{n-1}r_{zi}{}^{(1)}(t)+C_n r_{zi}(t)=0$$

$$r_{zi}(t)=\sum_{k=1}^{n}A_{zik}e^{\alpha_k t} \qquad r_{zi}{}^{(k)}(0_+)=r_{zi}{}^{(k)}(0_-)=r^{(k)}(0_-)$$

零状态响应：

$$C_0 r_{zs}{}^{(n)}(t)+C_1 r_{zs}{}^{(n-1)}(t)+\cdots+C_{n-1}r_{zs}{}^{(1)}(t)+C_n r_{zs}(t)=$$
$$E_0 e^{(m)}(t)+E_1 e^{(m-1)}(t)+\cdots+E_{m-1}e^{(1)}(t)+E_m e(t)$$

$$r_{zs}(t)=\sum_{k=1}^{n}A_{zsk}e^{\alpha_k t}+B(t) \qquad r_{zs}{}^{(k)}(0_-)=0$$

完全解：

$$r(t)=r_{zi}(t)+r_{zs}(t)$$

双零法（零输入+零状态）

例： 已知系统方程式 $r'(t)+3r(t)=3e(t)$，若起始状态 $r(0\_)=\frac{3}{2}$，激励信号 $e(t)=u(t)$，求系统的零输入响应和零状态响应。

解：

(1) 零输入响应 $r_{zi}(t)$ 满足：

$$r_{zi}'(t)+3r_{zi}(t)=0$$

$$r_{zi}(0_+)=r(0\_)=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow r_{zi}(t)=\frac{3}{2}e^{-3t}$$

(2) 零状态响应 $r_{zs}(t)$ 满足：

$$r_{zs}'(t)+3r_{zs}(t)=3u(t)$$

$$r_{zs}(0_+)=r_{zs}(0\_)=0$$

右端没有冲击函数

$$\Rightarrow r_{zs}(t)=-e^{-3t}+1$$

完全响应：

$$r(t)=r_{zi}(t)+r_{zs}(t)=\underbrace{\frac{3}{2}e^{-3t}}_{\text{零输入响应}}\underbrace{-e^{-3t}+1}_{\text{零状态响应}}=\underset{\text{自由响应}}{\frac{1}{2}e^{-3t}}+\overbrace{1}^{\text{强迫响应}}$$

■ 双零法（零输入+零状态）

课堂练习： 已知系统方程式 $y''(t)+5y'(t)+4y(t)=2f'(t)-4f(t)$，若起始状态及激励信号分别为 $y(0\_)=1, y'(0\_)=5, f(t)=u(t)$，求系统的零输入响应、零状态响应和完全响应。

解：

(1) 零输入响应 $y_{zi}(t)$ 满足：

$$y_{zi}''(t)+5y_{zi}'(t)+4y_{zi}(t)=0$$

$$y_{zi}(0_+)=y(0\_)=1$$

$$y_{zi}'(0_+)=y'(0\_)=5$$

$$\Rightarrow y_{zi}(t)=3e^{-t}-2e^{-4t}$$

(2) 零状态响应 $y_{zs}(t)$ 满足：

$$y_{zs}''(t)+5y_{zs}'(t)+4y_{zs}(t)=2\delta(t)-4u(t)$$

$$y_{zs}(0\_)=y_{zs}'(0\_)=0$$

$$y_{zs}(0_+)=y_{zs}(0\_)=0$$

$$y_{zs}'(0_+)=y_{zs}'(0\_)+2=2$$

$$\Rightarrow y_{zs}(t)=2e^{-t}-e^{-4t}-1$$

完全响应：

$$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=\underbrace{3e^{-t}-2e^{-4t}}_{\text{零输入响应}}+\underbrace{2e^{-t}-e^{-4t}-1}_{\text{零状态响应}}=\overbrace{5e^{-t}-3e^{-4t}}^{\text{自由响应}}\overbrace{-1}^{\text{强迫响应}}$$

2.2 零输入响应与零状态响应

■ 双零法（零输入+零状态）

完全解：

$$r(t)=r_{zi}(t)+r_{zs}(t)$$

$$=\underbrace{\sum_{k=1}^{n}A_{zik}e^{\alpha_k t}}_{\text{零输入响应}}+\underbrace{\sum_{k=1}^{n}A_{zsk}e^{\alpha_k t}+B(t)}_{\text{零状态响应}}$$

$$=\underbrace{\sum_{k=1}^{n}A_k e^{\alpha_k t}}_{\text{自由响应}}+\underbrace{B(t)}_{\text{强迫响应}}$$

结论：

① **自由响应**和**零输入响应**都是满足**齐次方程**的解，但**系数不同**。

② **自由响应**包括两部分，一部分由**起始状态决定**，另一部分由**激励信号决定**，但都与**系统自身参数**密切关联。

③ 若系统**起始无储能**，则**零输入响应为零**，但**自由响应可以不为零**，由**激励信号和系统参数**共同决定。

④ **零输入响应**由0-到0+**不跳变**；若有**跳变**则可能出现在**零状态响应**分量中。

2.2 零输入响应与零状态响应

■ 冲击响应和阶跃响应

- （单位）冲击响应：以$\delta(t)$作激励产生的零状态响应，$h(t)$
- （单位）阶跃响应：以$u(t)$作激励产生的零状态响应，$g(t)$

LTI系统方程：

$$C_0 r^{(n)}(t)+C_1 r^{(n-1)}(t)+\cdots+C_{n-1}r^{(1)}(t)+C_n r(t)=$$
$$E_0 e^{(m)}(t)+E_1 e^{(m-1)}(t)+\cdots+E_{m-1}e^{(1)}(t)+E_m e(t)$$

冲击响应：

$$e(t)=\delta(t)$$

$$r^{(k)}(0\_)=0$$

阶跃响应：

$$e(t)=u(t)$$

$$r^{(k)}(0\_)=0$$

2.2 零输入响应与零状态响应

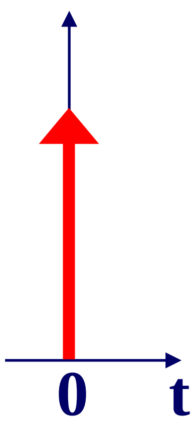
■ 冲击响应和阶跃响应

- 冲击响应 $h(t)$

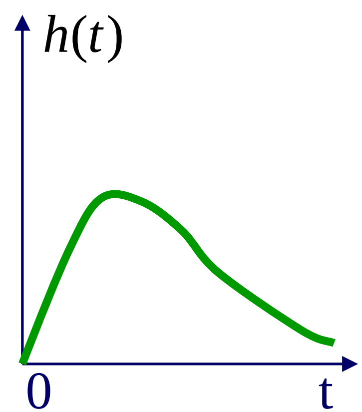
LTI系统方程： $C_0 h^{(n)}(t) + C_1 h^{(n-1)}(t) + \cdots + C_{n-1} h^{(1)}(t) + C_n h(t) =$

$$E_0 \delta^{(m)}(t) + E_1 \delta^{(m-1)}(t) + \cdots + E_{m-1} \delta^{(1)}(t) + E_m \delta(t)$$

激励信号： $e(t) = \delta(t)$ $\quad r^{(k)}(0\_) = 0$



$$h^{(k)}(0\_) = 0$$



■ 冲击响应和阶跃响应

例： 设描述系统的微分方程为 $r''(t)+4r'(t)+3r(t)=e'(t)+2e(t)$，试求其冲激响应 $h(t)$ 。

解法1：

由题意， $h''(t)+4h'(t)+3h(t)=\delta'(t)+2\delta(t), h'(0\_)=h(0\_)=0$

零状态响应：$h(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-3t}$

设 $h''(t)=\delta'(t)+A_0\delta(t)+f_2(t)$

$\Rightarrow h'(t)=\delta(t)+A_0\Delta u(t)+f_1(t)$

$h(t)=\Delta u(t)+f_0(t)$

$\Rightarrow A_0+4=2\Rightarrow A_0=-2\Rightarrow h(0_+)=h(0\_)+1=1, h'(0_+)=h'(0\_)-2=-2$

$$\begin{cases}A_1+A_2=1\\-A_1-3A_2=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_1=\frac{1}{2}\\A_2=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow h(t)=\tfrac{1}{2}(e^{-t}+e^{-3t})u(t)$$

2.2 零输入响应与零状态响应

- **冲击响应和阶跃响应**

$$C_0h^{(n)}(t)+C_1h^{(n-1)}(t)+\cdots+C_{n-1}h^{(1)}(t)+C_nh(t)=$$

$$E_0\delta^{(m)}(t)+E_1\delta^{(m-1)}(t)+\cdots+E_{m-1}\delta^{(1)}(t)+E_m\delta(t)$$

  - 冲击函数平衡法

由于 $t>0$ 时，$\delta(t)$及其各阶导数均为0，因此冲击响应 $h(t)$ 应与齐次解形式相同，$h(t)=\sum_{k=1}^{n}A_ke^{\alpha_k t}\quad(t>0).$

由n与m值的关系，冲击响应具有不同的形式：

$n>m \qquad h(t)=(\sum_{k=1}^{n}A_ke^{\alpha_k t})u(t)$

$n=m \qquad h(t)=B\delta(t)+(\sum_{k=1}^{n}A_ke^{\alpha_k t})u(t)$

$n<m \qquad h(t)=\sum_{j=0}^{m-n}B_j\delta^{(j)}(t)+(\sum_{k=1}^{n}A_ke^{\alpha_k t})u(t)$

将$h(t)$及其各阶导数代入原方程，

匹配冲激函数及其各阶导数的系数求得待定系数，从而得到冲激响应。

■ 冲击响应和阶跃响应

例： 设描述系统的微分方程为 $r''(t)+4r'(t)+3r(t)=e'(t)+2e(t)$，试求其冲激响应 $h(t)$ 。

解法2：

由题意， $h''(t)+4h'(t)+3h(t)=\delta'(t)+2\delta(t), h'(0\_)=h(0\_)=0$

特征根： $\alpha_1=-1, \alpha_2=-3$

$$\Rightarrow h(t)=(A_1e^{-t}+A_2e^{-3t})u(t)$$

$$\Rightarrow h'(t)=(A_1+A_2)\delta(t)+(-A_1e^{-t}-3A_2e^{-3t})u(t)$$

$$h''(t)=(A_1+A_2)\delta'(t)+(-A_1-3A_2)\delta(t)+(A_1e^{-t}+9A_2e^{-3t})u(t)$$

代入方程：$(A_1+A_2)\delta'(t)+(3A_1+A_2)\delta(t)=\delta'(t)+2\delta(t)$

$$\begin{cases} A_1+A_2=1 \\ 3A_1+A_2=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1=\frac{1}{2} \\ A_2=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow h(t)=\tfrac{1}{2}(e^{-t}+e^{-3t})u(t)$$

2.2 零输入响应与零状态响应

■ 冲击响应和阶跃响应

课堂练习： 设描述系统的微分方程为 $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=f(t)$，试求其冲激响应 $h(t)$ 。

解：

当 $f(t)=\delta(t)$ 时, $h(t)$ 满足 $\begin{cases} h''(t)+5h'(t)+6h(t)=\delta(t) \\ h'(0_-)=h(0_-)=0 \end{cases}$

特征根：$\lambda_1=-2,\lambda_2=-3$

$$h(t)=(A_1e^{-2t}+A_2e^{-3t})u(t)$$

$$\Rightarrow h'(t)=(A_1+A_2)\delta(t)+(-2A_1e^{-2t}-3A_2e^{-3t})u(t)$$

$$h''(t)=(A_1+A_2)\delta'(t)+(-2A_1-3A_2)\delta(t)+(4A_1e^{-t}+9A_2e^{-3t})u(t)$$

代入方程：$(A_1+A_2)\delta'(t)+(3A_1+2A_2)\delta(t)+\cdots=\delta(t)$

$$\begin{cases} A_1+A_2=0 \\ 3A_1+2A_2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1=1 \\ A_2=-1 \end{cases} \Rightarrow h(t)=(e^{-2t}-e^{-3t})u(t)$$

2.2 零输入响应与零状态响应

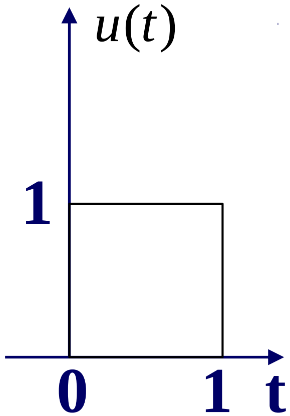
■ 冲击响应和阶跃响应

- 阶跃响应 $g(t)$

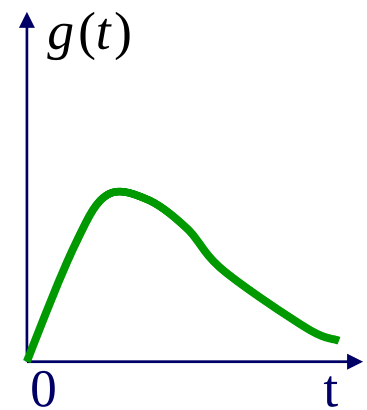
LTI系统方程： $C_0 g^{(n)}(t) + C_1 g^{(n-1)}(t) + \cdots + C_{n-1} g^{(1)}(t) + C_n g(t) =$

$$E_0 u^{(m)}(t) + E_1 u^{(m-1)}(t) + \cdots + E_{m-1} u^{(1)}(t) + E_m u(t)$$

激励信号： $e(t) = u(t)$ $\quad r^{(k)}(0\_) = 0$



$g^{(k)}(0\_) = 0$



阶跃响应包括齐次解和特解，**特解为常数**。也可以根据**线性时不变系统的特性**，**利用冲击响应与阶跃响应的关系**求阶跃响应。

2.2 零输入响应与零状态响应

冲击响应和阶跃响应

- 阶跃响应 $g(t)$

线性时不变系统的微分、积分特性：

$$\because u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau$$

$$\therefore g(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t) dt$$

2.3 系统的完全响应分析

- 全响应

求解方法	分解	
经典法	齐次解（自由响应）	特解（强迫响应）
双零法	零输入响应（内部储能）	零状态响应（外部激励）
	瞬（暂）态响应	稳态响应

t->∞时，

响应->0的分量

t->∞时，

保留下来的分量

全响应

完全解：

$$\begin{aligned} r(t) &= r_{zi}(t) + r_{zs}(t) \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} A_{zik} e^{\alpha_k t}}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} A_{zsk} e^{\alpha_k t} + B(t)}_{\text{零状态响应}} \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} A_k e^{\alpha_k t}}_{\text{自由响应}} + \underbrace{B(t)}_{\text{强迫响应}} \end{aligned}$$

常系数线性微分方程关于线性的结论：

① **零状态线性：** 当起始状态为零时，零状态响应对于各激励信号呈线性。

② **零输入线性：** 当激励为零时，零输入响应对于各起始状态成线性。自由响应包括两部分，一部分由起始状态决定，另一部分由激励信号决定，但都与系统自身参数密切关联。

③ 把激励和起始状态都视为系统的外施作用，完全响应对于外施作用呈线性。

全响应

例： 已知一线性时不变系统，在相同初始条件下，当激励为 $e(t)$ 时，其全响应为 $r_1(t)=[2e^{-3t}+\sin(2t)]u(t)$；当激励为 $2e(t)$ 时，其全响应为 $r_2(t)=[e^{-3t}+2\sin(2t)]u(t)$。求：

(1) 初始条件不变，当激励为 $e(t-t_0)$ 时的全响应 $r_3(t)$，t_0 为大于零的实常数；

(2) 初始条件增大1倍，当激励为 $0.5e(t)$ 时的全响应。

解： 由题意，$r_1(t)=r_{zi}(t)+r_{zs}(t)=[2e^{-3t}+\sin(2t)]u(t)$

$$r_2(t)=r_{zi}(t)+2r_{zs}(t)=[e^{-3t}+2\sin(2t)]u(t)$$

$$\therefore \begin{cases} r_{zi}(t)=3e^{-3t}u(t) \\ r_{zs}(t)=[-e^{-3t}+\sin(2t)]u(t) \end{cases}$$

(1) $r_3(t)=r_{zi}(t)+r_{zs}(t-t_0)=3e^{-3t}u(t)+[-e^{-3(t-t_0)}+\sin(2t-2t_0)]u(t-t_0)$

(2) $r_4(t)=2r_{zi}(t)+0.5r_{zs}(t)=[5.5e^{-3t}+0.5\sin(2t)]u(t)$

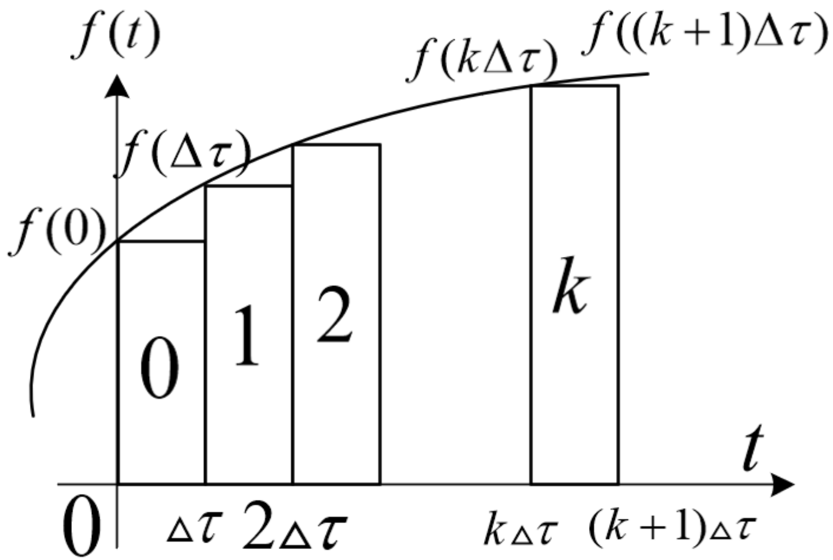
卷积的定义

信号可以分解为许多脉冲分量之和，如矩形窄脉冲。

步长 Δt：矩形窄脉冲的宽度

$f(k\Delta t)$：矩形窄脉冲的高度

用矩形脉冲序列逼近表示 $f(t)$



第0个脉冲：

$$f_0(t)=f(0)[u(t)-u(t-\Delta\tau)]$$

第1个脉冲：

$$f_1(t)=f(\Delta\tau)[u(t-\Delta\tau)-u(t-2\Delta\tau)]$$

第k个脉冲：

$$f_k(t)=f(k\Delta\tau)[u(t-k\Delta\tau)-u(t-(k+1)\Delta\tau)]$$

$$f(t)\approx\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(k\Delta\tau)[u(t-k\Delta\tau)-u(t-(k+1)\Delta\tau)]$$

2.4 卷积

■ 卷积的定义

$$f(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta\tau)[u(t-k\Delta\tau)-u(t-(k+1)\Delta\tau)]$$

当 $\Delta\tau$ 很小时，$\dfrac{u(t)-u(t-\Delta\tau)}{\Delta\tau} \approx \dfrac{d}{dt}u(t)=\delta(t)$ ，即

$$u(t)-u(t-\Delta\tau) \approx \delta(t)\cdot\Delta\tau \qquad u(t-k\Delta\tau)-u(t-(k+1)\Delta\tau) \approx \delta(t-k\Delta\tau)\cdot\Delta\tau$$

$$\therefore\ f_0(t)=\Delta\tau f(0)\delta(t) \qquad f_0(t)=f(0)[u(t)-u(t-\Delta\tau)]$$

$$f_1(t)=\Delta\tau f(\Delta\tau)\delta(t-\Delta\tau) \qquad f_1(t)=f(\Delta\tau)[u(t-\Delta\tau)-u(t-2\Delta\tau)]$$

$$f_k(t)=\Delta\tau f(k\Delta\tau)\delta(t-k\Delta\tau) \qquad f_k(t)=f(k\Delta\tau)[u(t-k\Delta\tau)-u(t-(k+1)\Delta\tau)]$$

$$\therefore\ f(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta\tau f(k\Delta\tau)\delta(t-k\Delta\tau)$$

由此可见，信号 $f(t)$ 可以由无限多个出现在不同位置、强度不同的冲击函数组成。

2.4 卷积

■ 卷积的定义

当 $\Delta\tau$ 无穷小，取极限 $\Delta\tau \to d\tau, k\Delta\tau \to \tau, \sum_{-\infty}^{+\infty} \to \int_{-\infty}^{+\infty}$

$$f(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta\tau f(k\Delta\tau)\delta(t-k\Delta\tau)$$

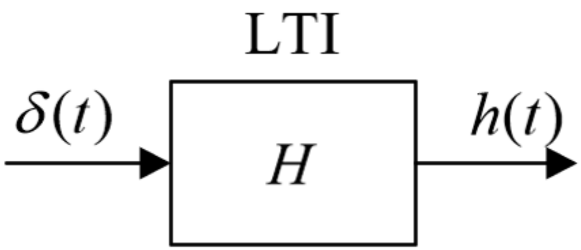
$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

对于因果信号，即 $t<0$ 时 $f(t)=0$ ，则

$$f(t) = \int_{0}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

2.4 卷积

■ **卷积的定义**



$$f_0(t)=\Delta\tau f(0)\delta(t)$$
$$f_1(t)=\Delta\tau f(\Delta\tau)\delta(t-\Delta\tau)$$
$$f_k(t)=\Delta\tau f(k\Delta\tau)\delta(t-k\Delta\tau)$$
$$f(t)\approx\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Delta\tau f(k\Delta\tau)\delta(t-k\Delta\tau)$$

$\delta(t)$	$h(t)$
$\Delta\tau f(0)\delta(t)$	$\Delta\tau f(0)h(t)$
$\Delta\tau f(\Delta\tau)\delta(t-\Delta\tau)$	$\Delta\tau f(\Delta\tau)h(t-\Delta\tau)$
$\Delta\tau f(k\Delta\tau)\delta(t-k\Delta\tau)$	$\Delta\tau f(k\Delta\tau)h(t-k\Delta\tau)$
$f(t)\approx\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Delta\tau f(k\Delta\tau)\delta(t-k\Delta\tau)$	$y(t)\approx\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Delta\tau f(k\Delta\tau)h(t-k\Delta\tau)$

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

$$\boxed{\begin{aligned}y(t)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)h(t-\tau)d\tau\\&=f(t)\otimes h(t)=f(t)*h(t)\end{aligned}}$$

$f(t)$与$h(t)$的卷积

(Convolution)

$$=\int_{0_-}^{+\infty}f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$ (因果信号)

2.4 卷积

卷积的计算

例： 已知 $f_1(t)=e^{-\frac{t}{2}}[u(t)-u(t-3)],\ f_2(t)=e^{-t}u(t)$，求 $s(t)=f_1(t)*f_2(t)$ 。

解：

由卷积定义有 $s(t)=f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\tau}{2}}[u(\tau)-u(\tau-3)]e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau$$

$$=e^{-t}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\frac{\tau}{2}}[u(\tau)-u(\tau-3)]u(t-\tau)d\tau$$

$$=e^{-t}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\frac{\tau}{2}}u(\tau)u(t-\tau)d\tau-e^{-t}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\frac{\tau}{2}}u(\tau-3)u(t-\tau)d\tau$$

$$=e^{-t}(\int_{0}^{t}e^{\frac{\tau}{2}}d\tau)u(t)-e^{-t}(\int_{3}^{t}e^{\frac{\tau}{2}}d\tau)u(t-3)$$

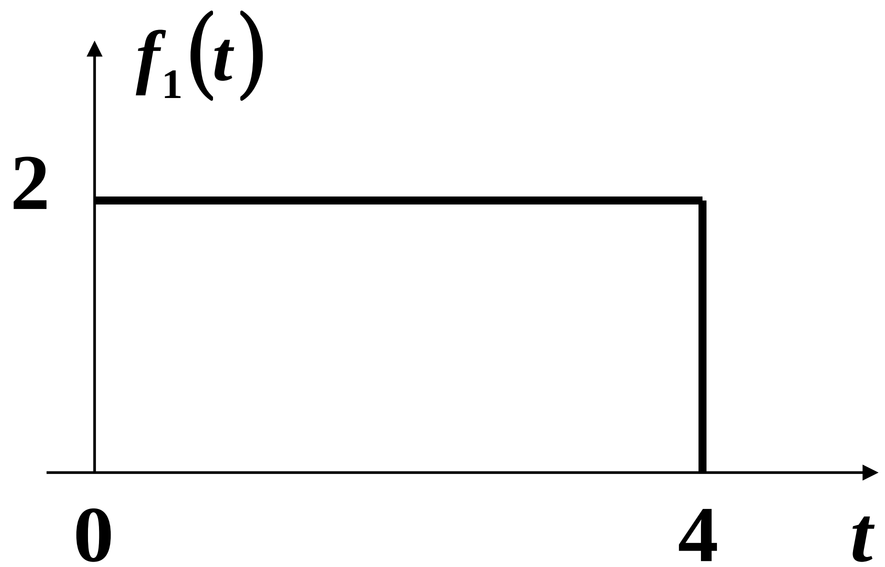
$$=2(e^{-\frac{t}{2}}-e^{-t})u(t)-2(e^{-\frac{t}{2}}-e^{-t+\frac{3}{2}})u(t-3)$$

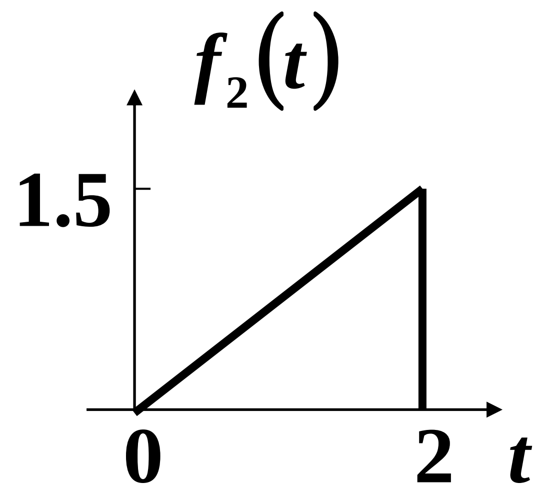
卷积的图示

设有函数$f_1(t)$和$f_2(t)$，如下图。

函数$f_1(t)$是幅度为2的矩形脉冲，$f_2(t)$是锯齿波。

如何计算$y_{zs}(t)=f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$。



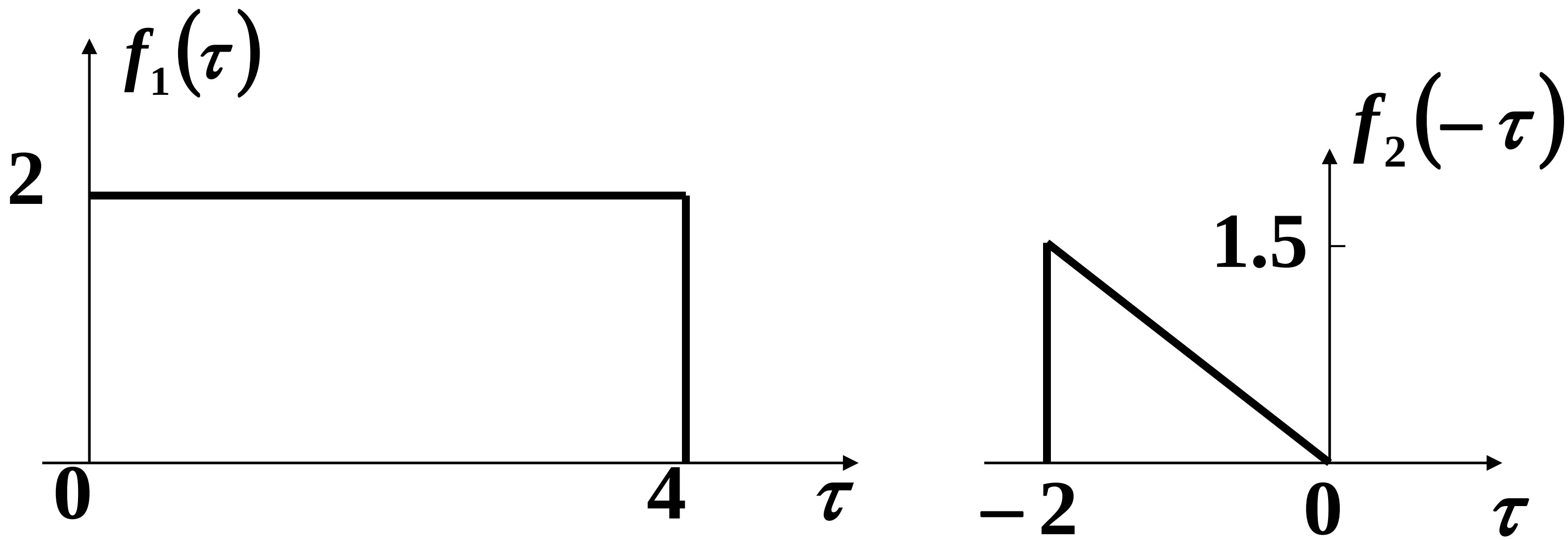


■ 卷积的图示

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)d\tau$$

第一步：先将 $f_1(t)$、$f_2(t)$ 的自变量用 τ 代换，

然后将 $f_2(\tau)$ 反转得 $f_2(-\tau)$ 如图。



2.4 卷积

卷积的图示

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau$$

第二步：将$f_2(-\tau)$沿τ轴平移t得$f_2(t-\tau)$。

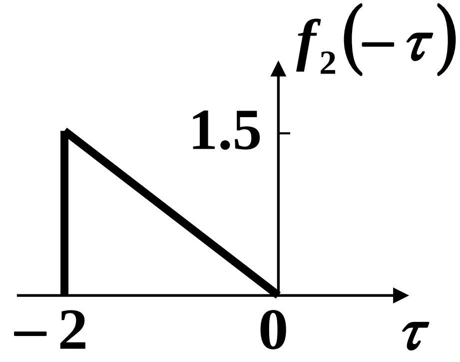
当$t>0$时，　将$f_2(-\tau)$沿τ轴右移t得$f_2(t-\tau)$。

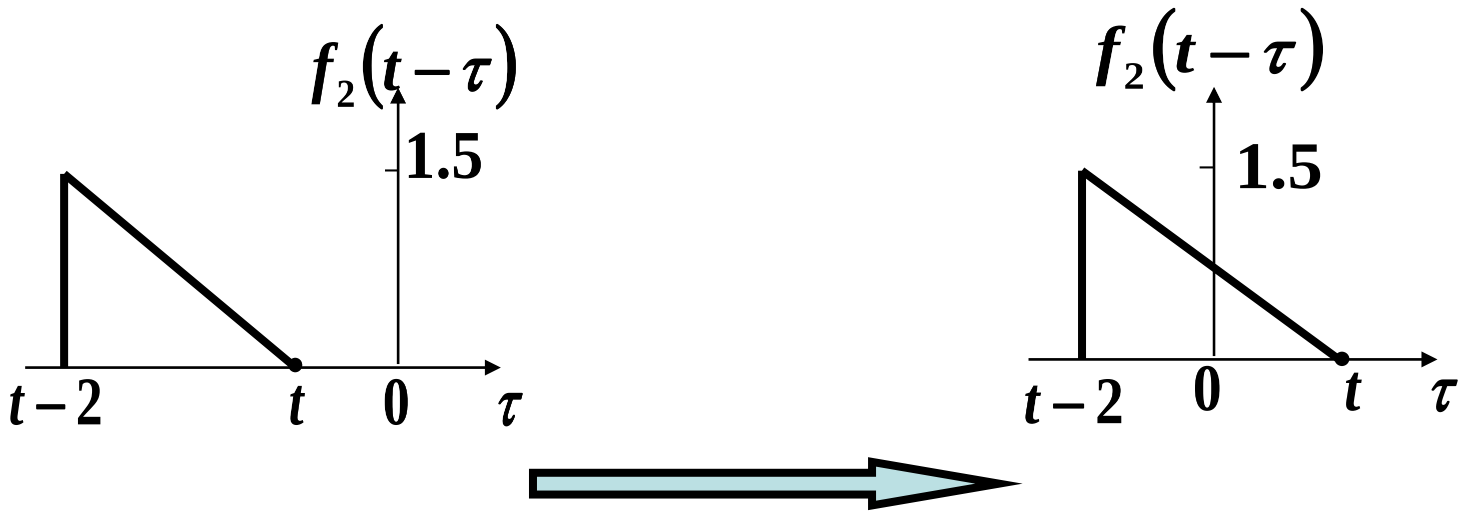
当$t<0$时，　将$f_2(-\tau)$沿τ轴左移$|t|$得$f_2(t-\tau)$。

可见，$f_2(t-\tau)$的位置随t而变，无论如何，$f_2(-\tau)$在$\tau=0$点所对应的函数值移至$\tau=t$点。

2.4 卷积

- 卷积的图示

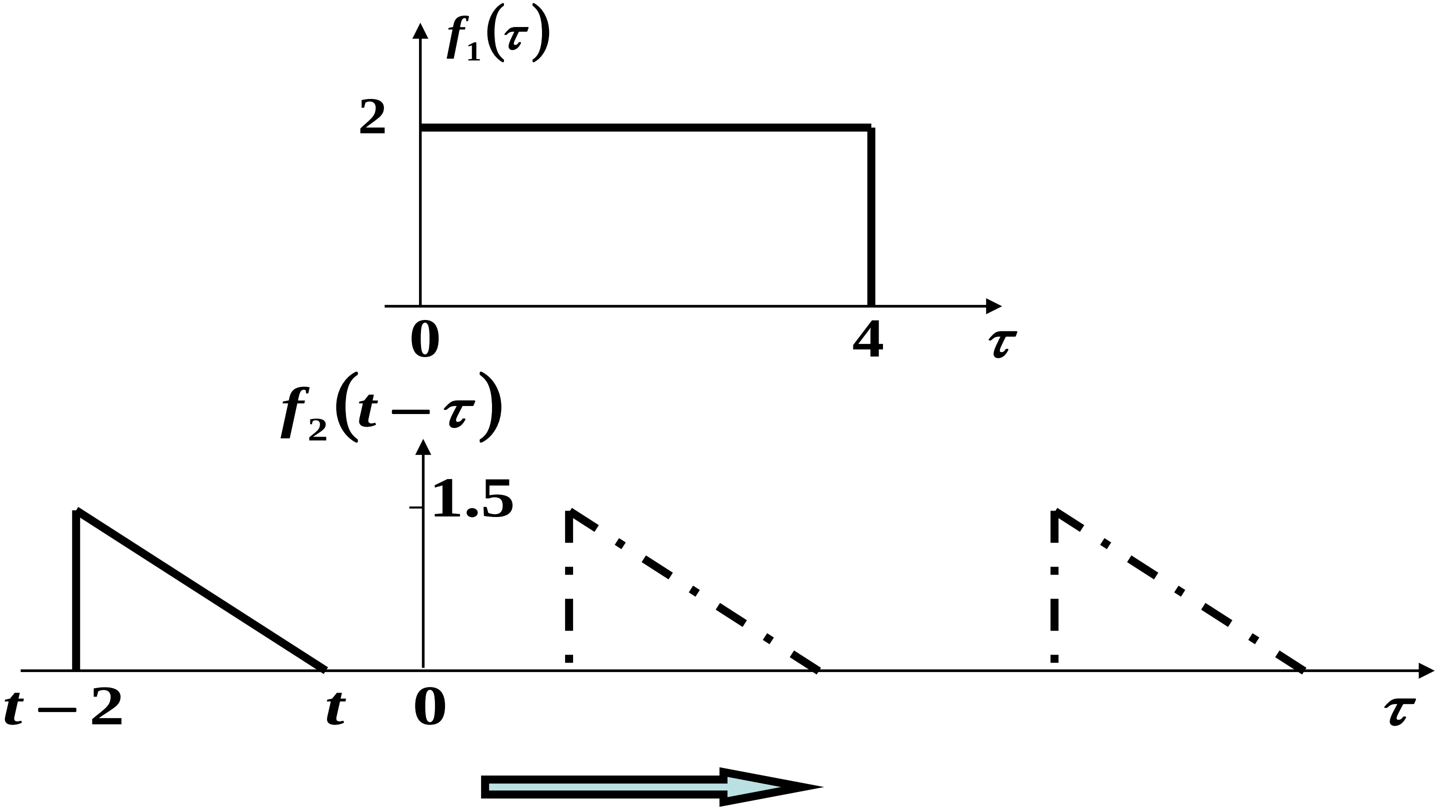




当 t 从 $-\infty$ 变到 $+\infty$ 的过程中 $f_2(t-\tau)$ 的变化趋势.

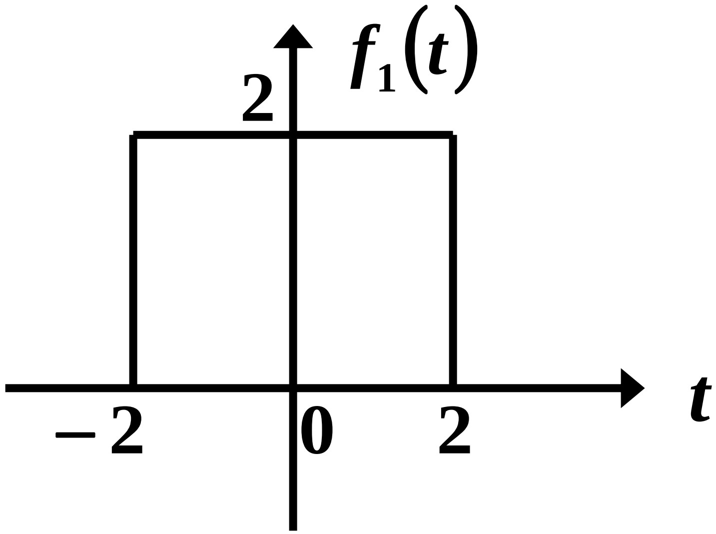
卷积的图示

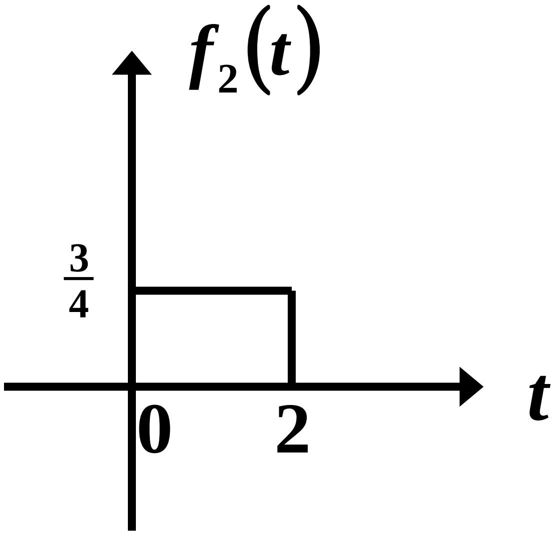
第三步：讨论 t 的范围并计算积分 $\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau$



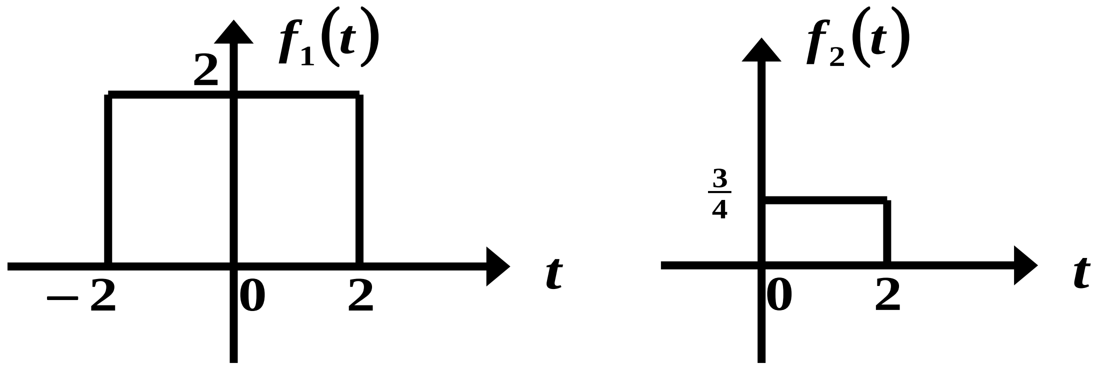
卷积结果将随着t的变化而变化。

例：求下图所示函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的卷积积分。

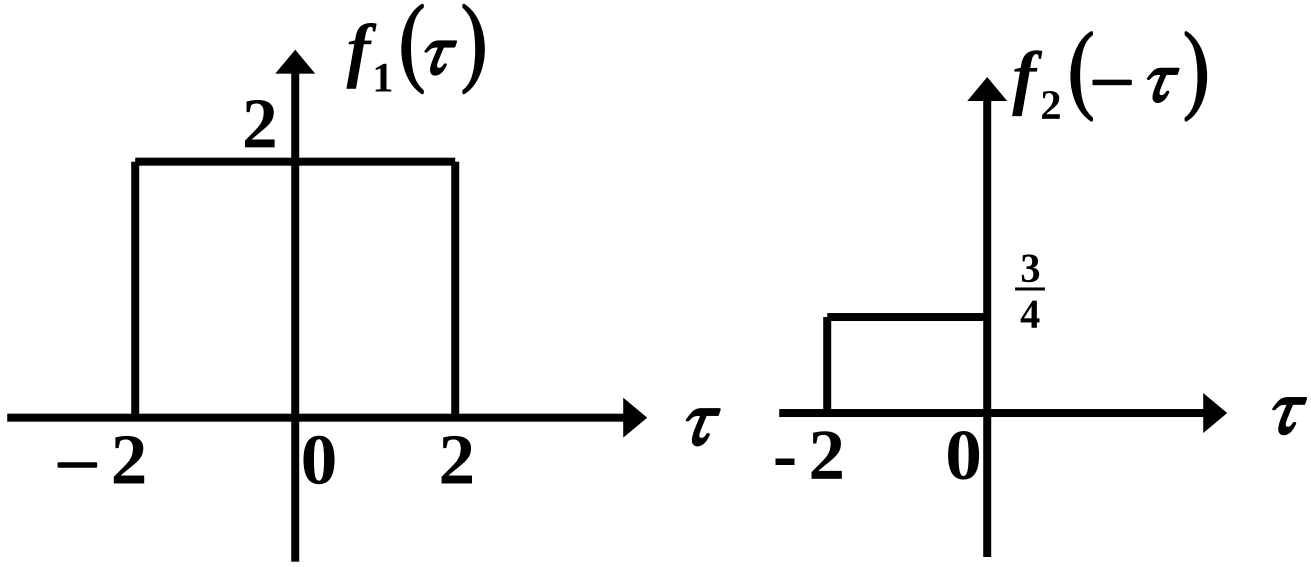




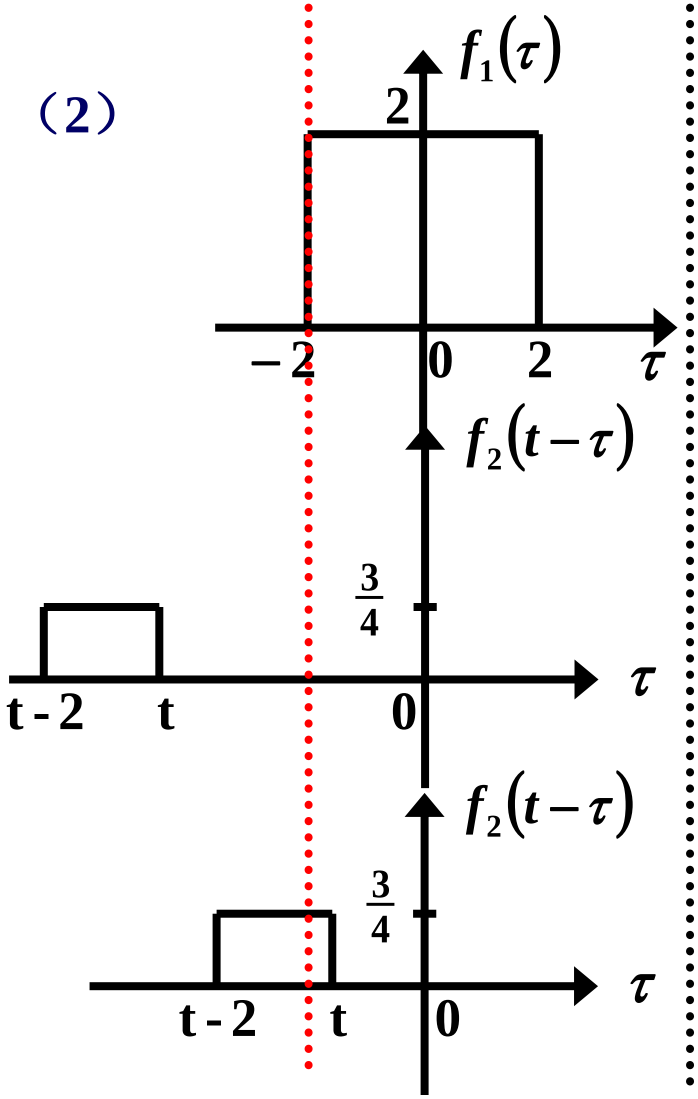
$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$



解（1）画出$f_1(\tau)$和$f_2(-\tau)$的波形。



（2）



(3)　讨论 t 的取值范围，并计算积分：

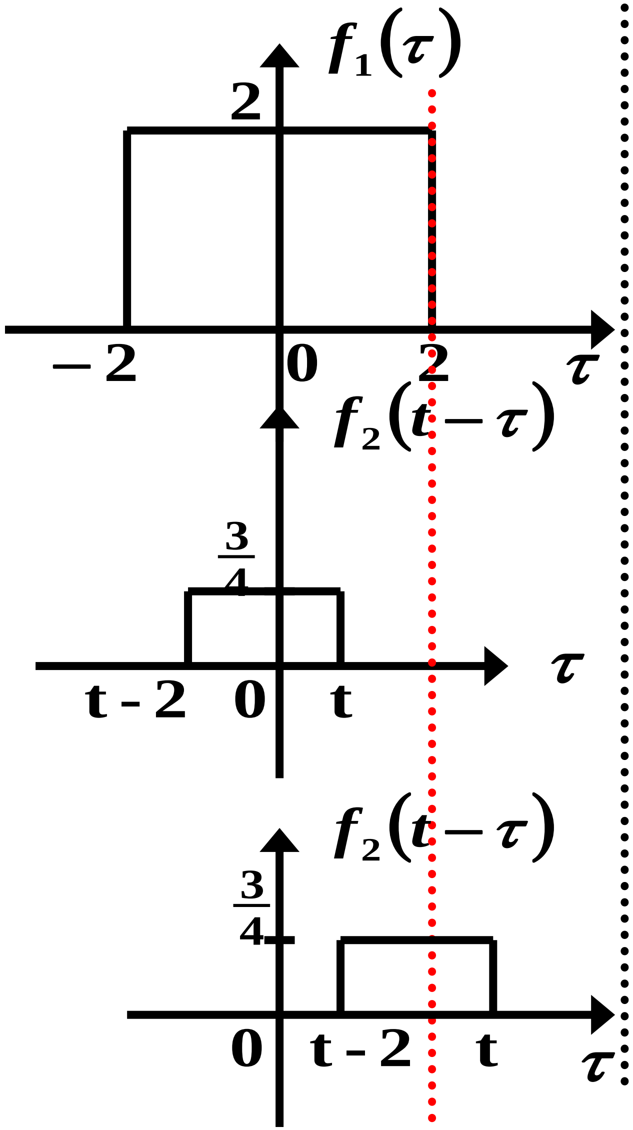
$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

当 $t<-2$ 时，$f(t)=0$

当 $-2<t<0$ 时，

$$f(t)=\int_{-2}^{t} 2\times\frac{3}{4}\, d\tau$$

$$=\frac{3}{2}(t+2)$$



当 $0<t<2$ 时，

$$f(t)=\int_{t-2}^{t} 2\times\tfrac{3}{4}\,d\tau=3$$

当 $2<t<4$ 时，

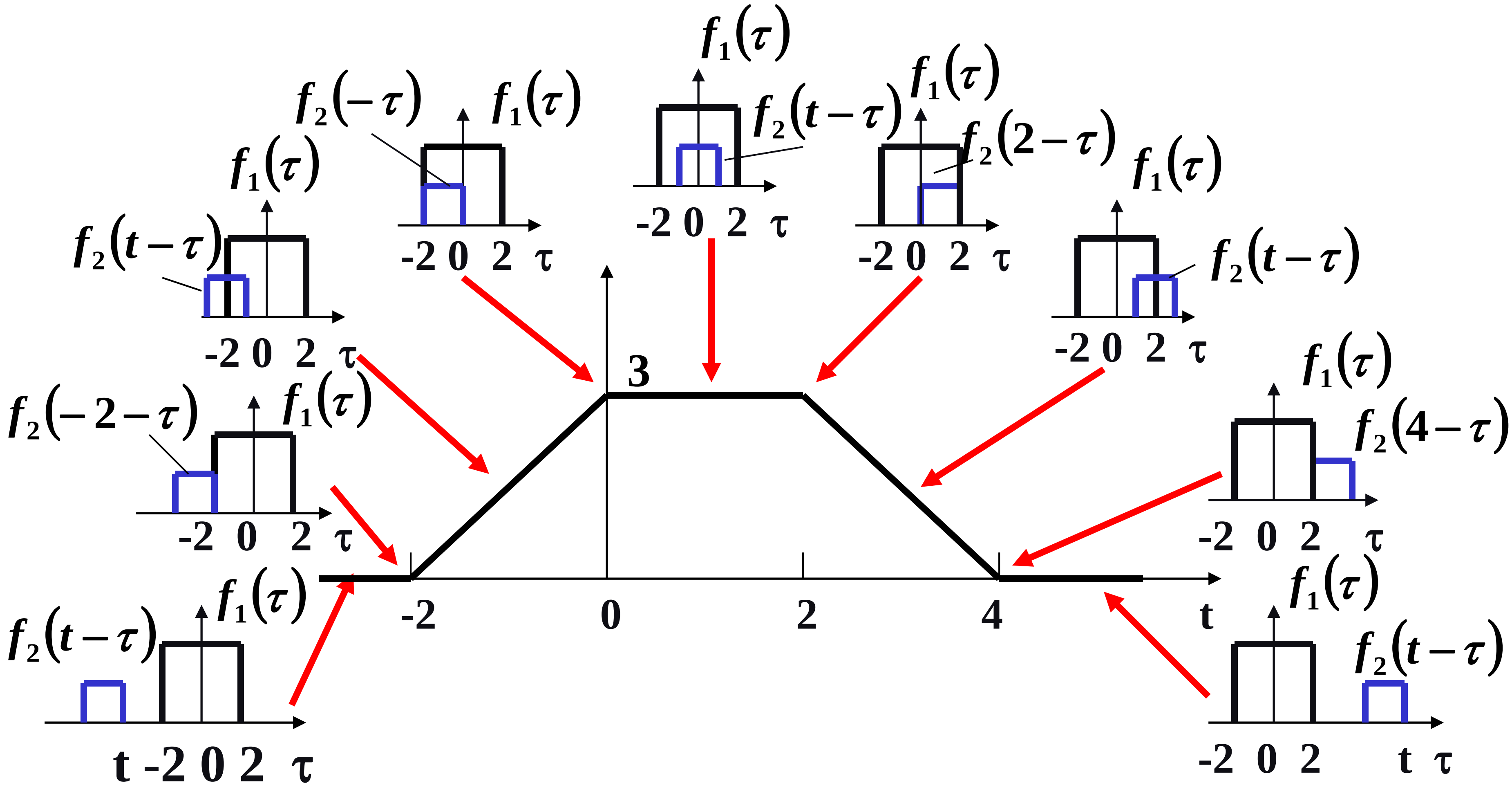
$$f(t)=\int_{t-2}^{2} 2\times\tfrac{3}{4}\,d\tau$$

$$=\tfrac{3}{2}(4-t)$$

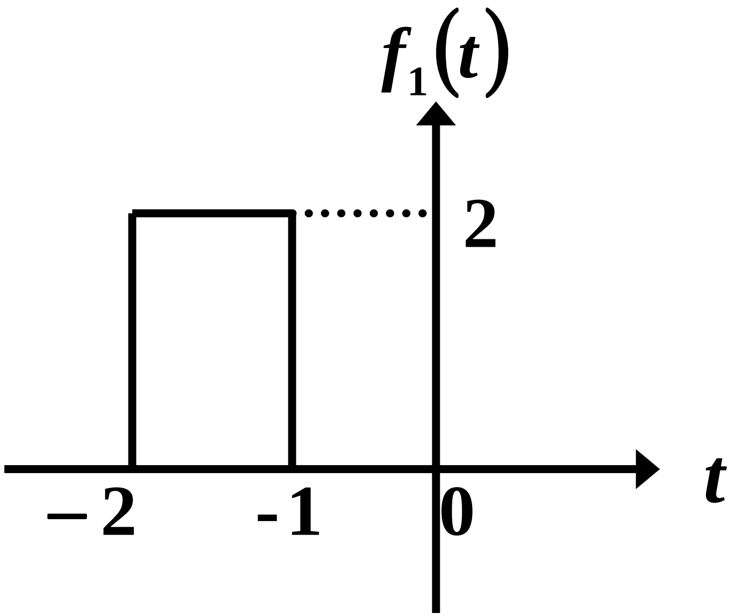
当 $t>4$ 时， $f(t)=0$

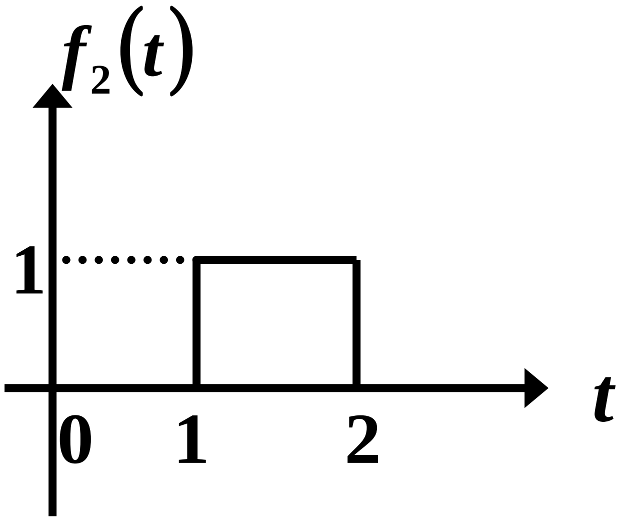
$$\therefore f(t) = f_1(t) * f_2(t)$$

$$= \begin{cases} 0, & t < -2 \\ \frac{3}{2}(t+2), & -2 < t < 0 \\ 3, & 0 < t < 2 \\ \frac{3}{2}(4-t), & 2 < t < 4 \\ 0, & t > 4 \end{cases}$$

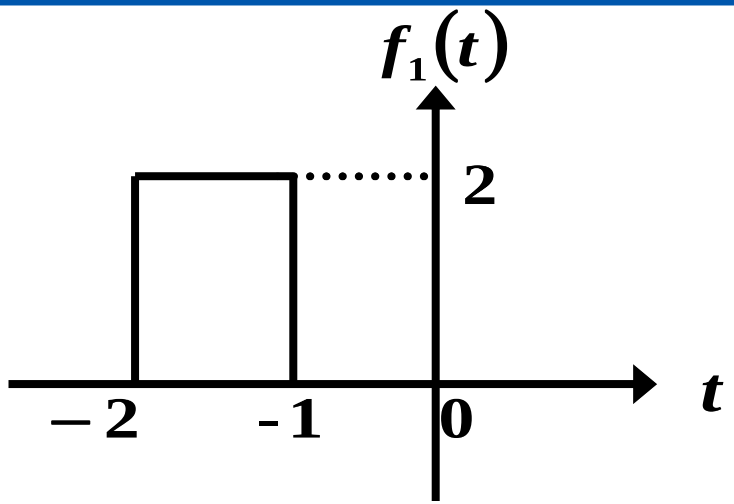

$f_1(\tau)$
$f_2(t-\tau)$
-2 0 2 τ
$f_2(-\tau)$
$f_1(\tau)$
-2 0 2 τ
$f_1(\tau)$
$f_2(t-\tau)$
-2 0 2 τ
$f_1(\tau)$
$f_2(2-\tau)$
-2 0 2 τ
$f_1(\tau)$
$f_2(t-\tau)$
-2 0 2 τ
$f_2(-2-\tau)$
$f_1(\tau)$
-2 0 2 τ
3
-2
0
2
4
t
$f_1(\tau)$
$f_2(4-\tau)$
-2 0 2 τ
$f_2(t-\tau)$
$f_1(\tau)$
t -2 0 2 τ
$f_1(\tau)$
$f_2(t-\tau)$
-2 0 2 t τ

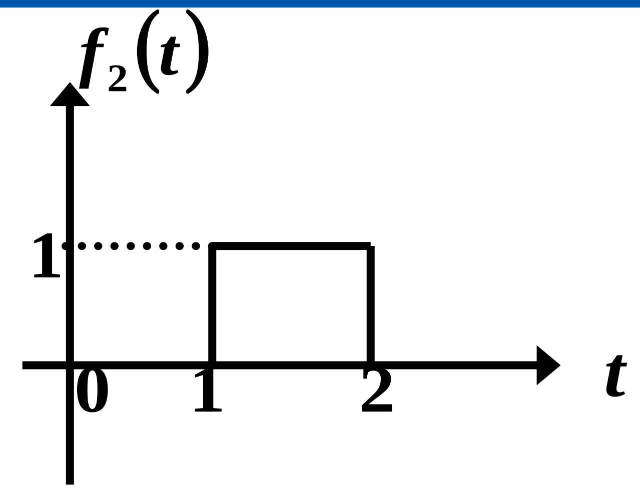
练习：画出下列图形的卷积积分.



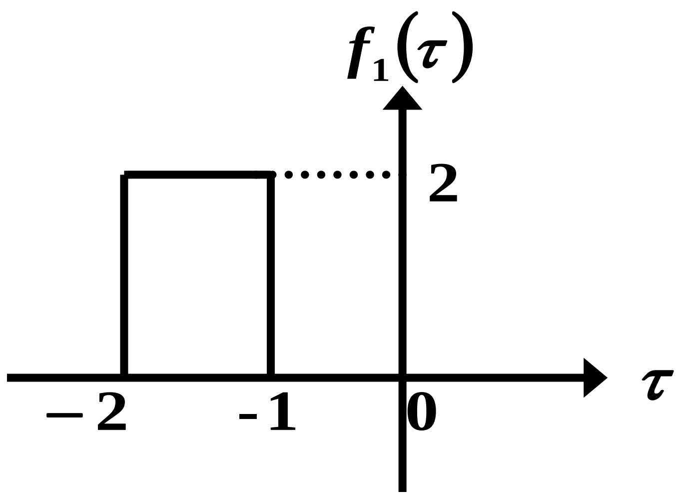


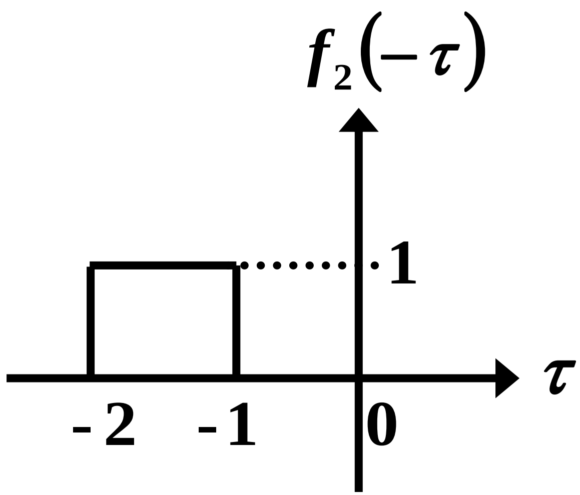
$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$



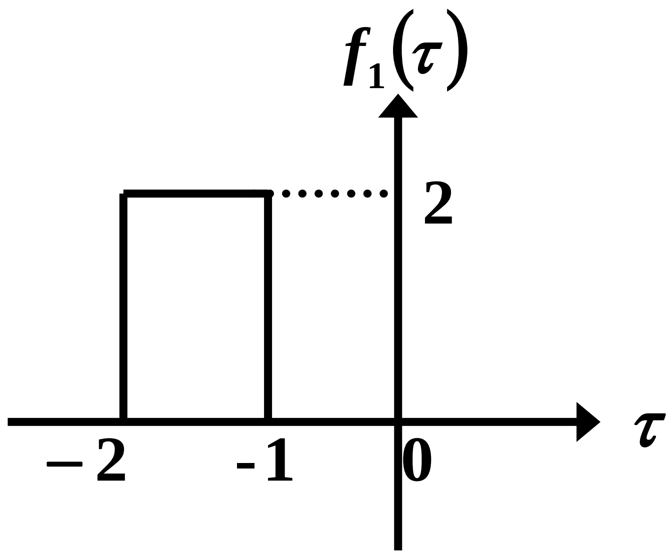


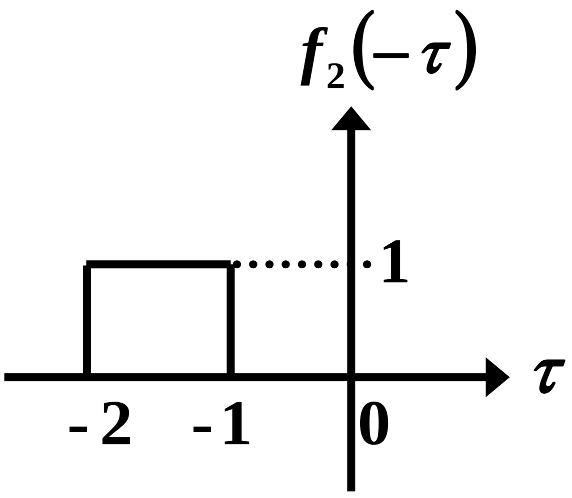
解（1）画出 $f_1(\tau)$ 和 $f_2(-\tau)$ 的波形。

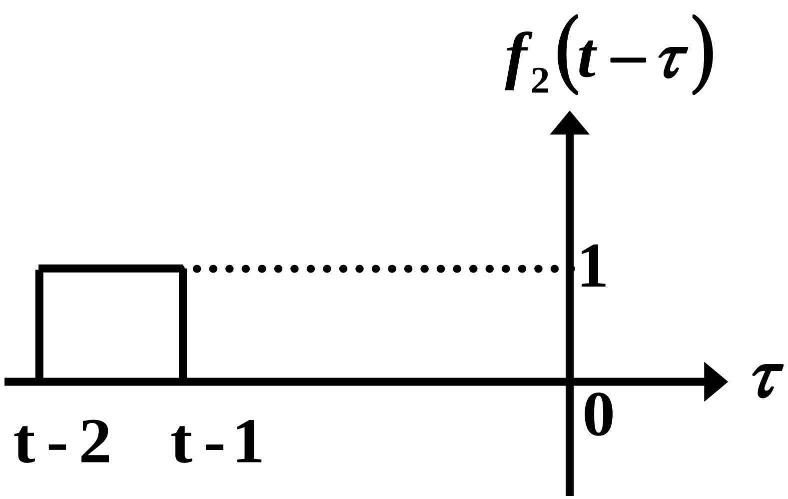


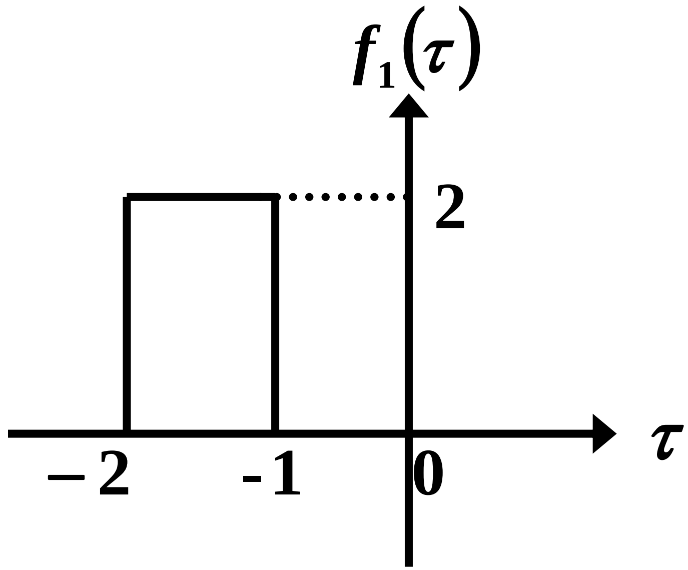


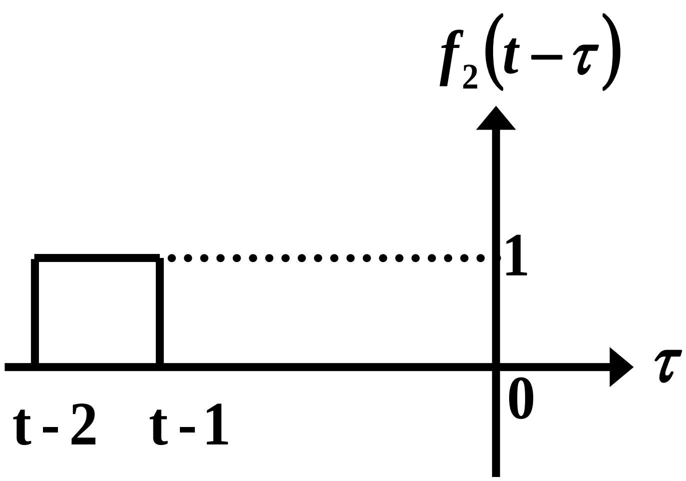
（2）











（3）讨论t的范围并计算卷积积分:

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)\,d\tau$$

当 $t-1<-2 \Rightarrow t<-1$ 时，

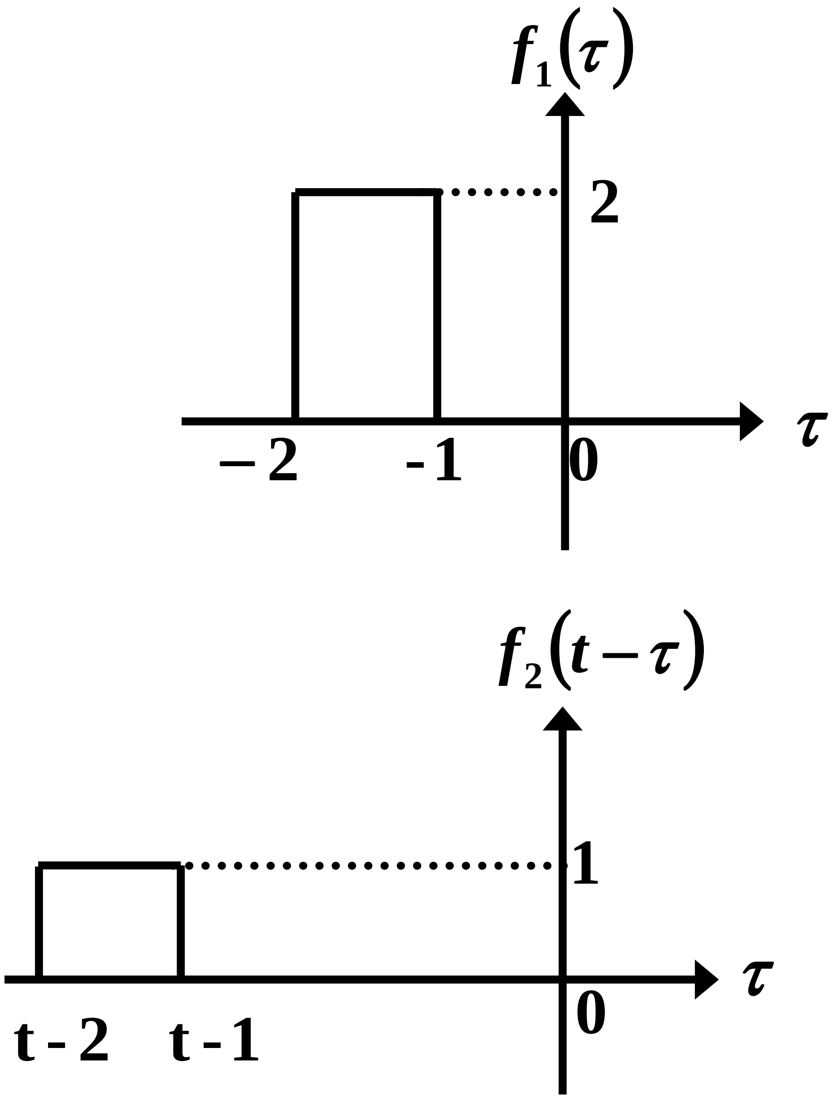
$$f(t)=0$$

当 $-2<t-1<-1$

$\Rightarrow -1<t<0$ 时，

$$f(t)=\int_{-2}^{t-1} 1\times 2\,d\tau$$

$$=2(t+1)$$



(3）讨论t的范围并计算卷积积分:

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

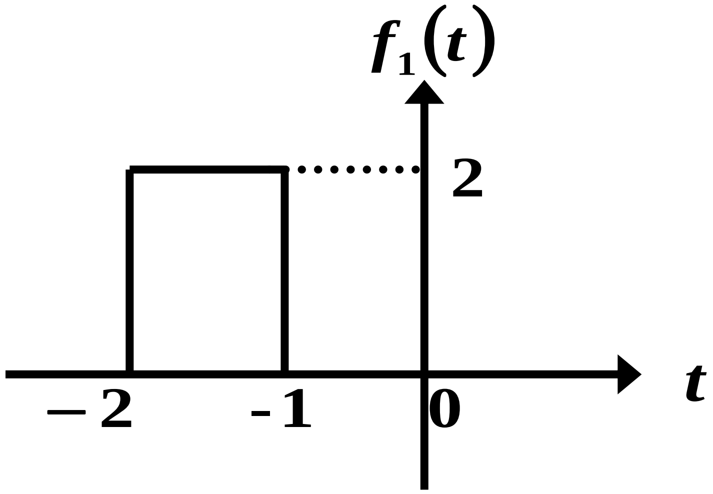
当 $-1<t-1<0$

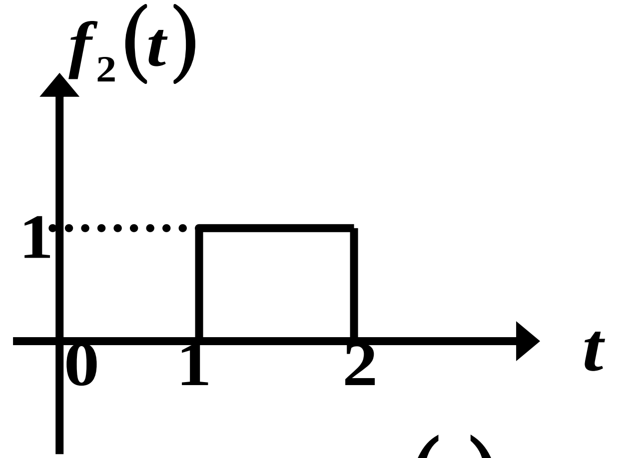
$\Rightarrow 0<t<1$ 时，

$$f(t)=\int_{t-2}^{-1} 1\times 2\, d\tau$$
$$=2(1-t)$$

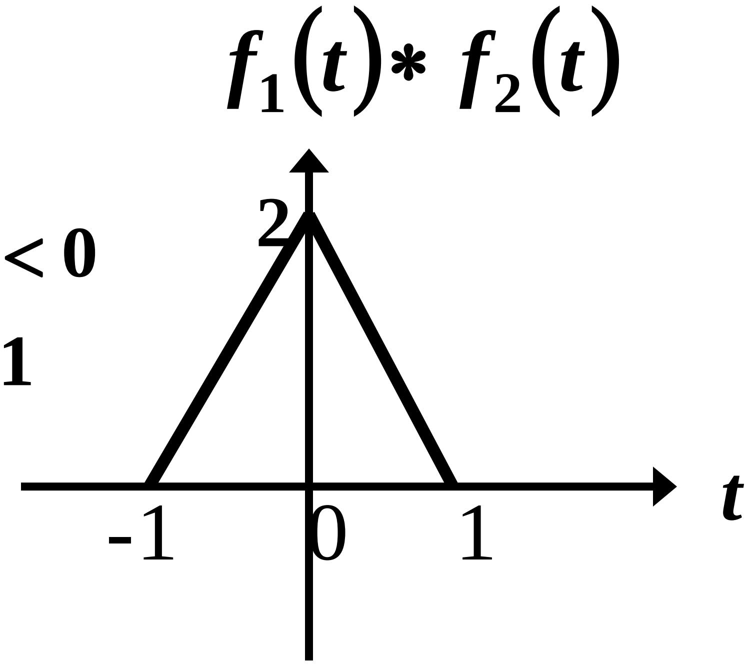
当 $t-1>0 \Rightarrow t>1$ 时，

$$f(t)=0$$



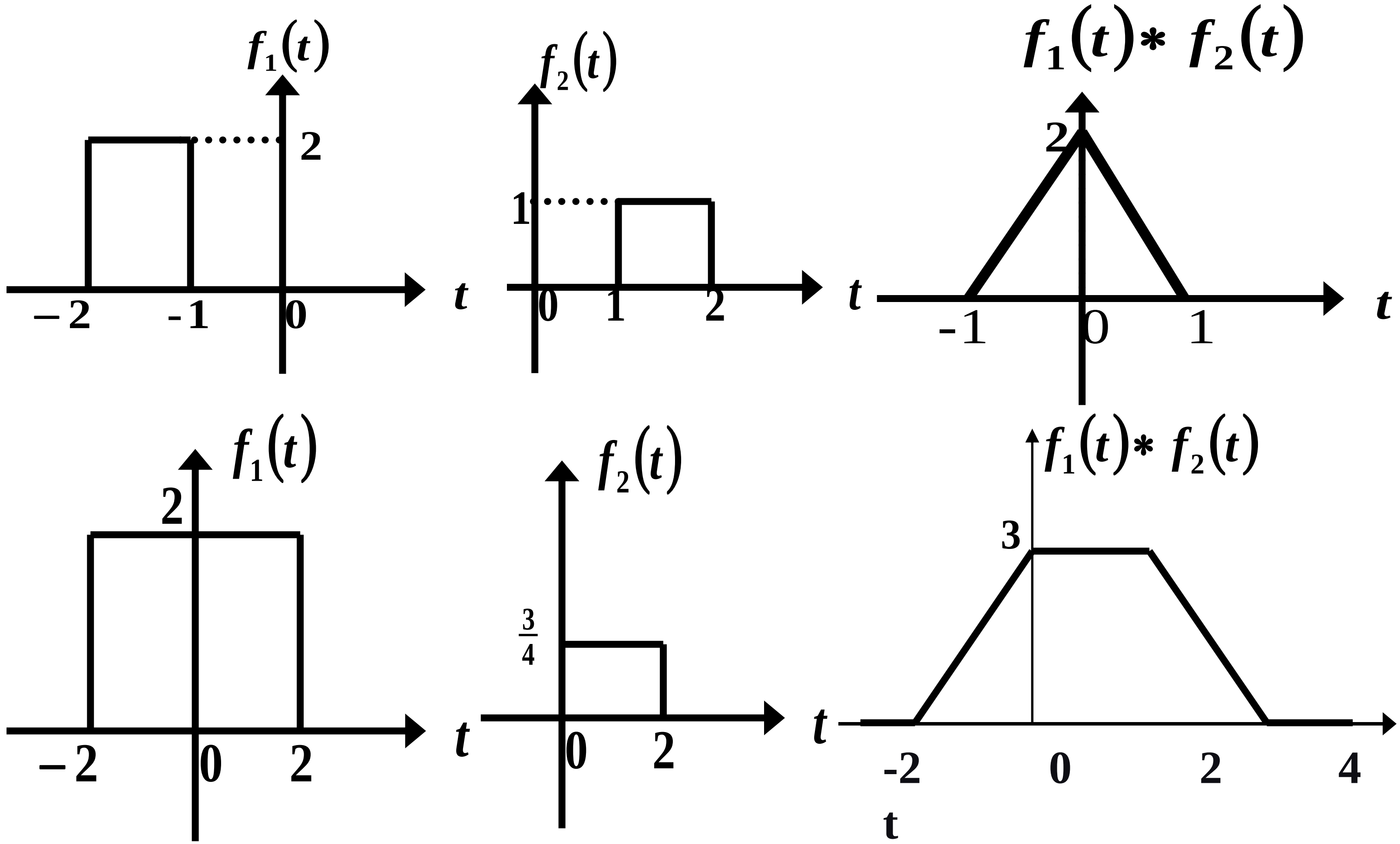


$$f(t)=f_1(t)*f_2(t)=\begin{cases}0, & t<-1, t>1\\ 2(t+1), & -1<t<0\\ 2(1-t), & 0<t<1\end{cases}$$



思考：两个时限信号的卷积积分结果有何特点?

从非零区间长度及形状考虑。



结论：

1、两个时限信号的卷积积分结果仍是时限信号，其非零区间宽度为两个时限信号宽度之和。其非零区间起点为两个时限信号非零区间起点之和，非零区间终点为两个时限信号非零区间终点之和。

2、当两个时限信号均为矩形脉冲时，若二者宽度相同，则卷积波形为三角形；若二者宽度不相同，则卷积波形为梯形。

2.4 卷积

卷积的性质

- 卷积代数

1. 交换律 $f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$

证明： $f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$

令: $t-\tau=\eta$ 则: $\tau=t-\eta$ $d\tau=-d\eta$

$$f_1(t)*f_2(t)=-\int_{\infty}^{-\infty}f_1(t-\eta)f_2(\eta)d\eta$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f_2(\eta)f_1(t-\eta)d\eta$$

$$=f_2(t)*f_1(t)$$

例：设$f_1(t)=e^{-\alpha t}u(t)$，$f_2(t)=u(t)$，分别求：

$f_1(t)*f_2(t)$和$f_2(t)*f_1(t)$。

解：

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha\tau}u(\tau)\cdot u(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_0^t e^{-\alpha\tau}d\tau=\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})u(t)$$

$$f_2(t)*f_1(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_2(\tau)\cdot f_1(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}u(\tau)\cdot e^{-\alpha(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}d\tau=\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})u(t)$$

2.4 卷积

卷积的性质

- 卷积代数

2. 分配律 $f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)]=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t)$

证明:

$$f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)[f_2(t-\tau)+f_3(t-\tau)]d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau+\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_3(t-\tau)d\tau$$

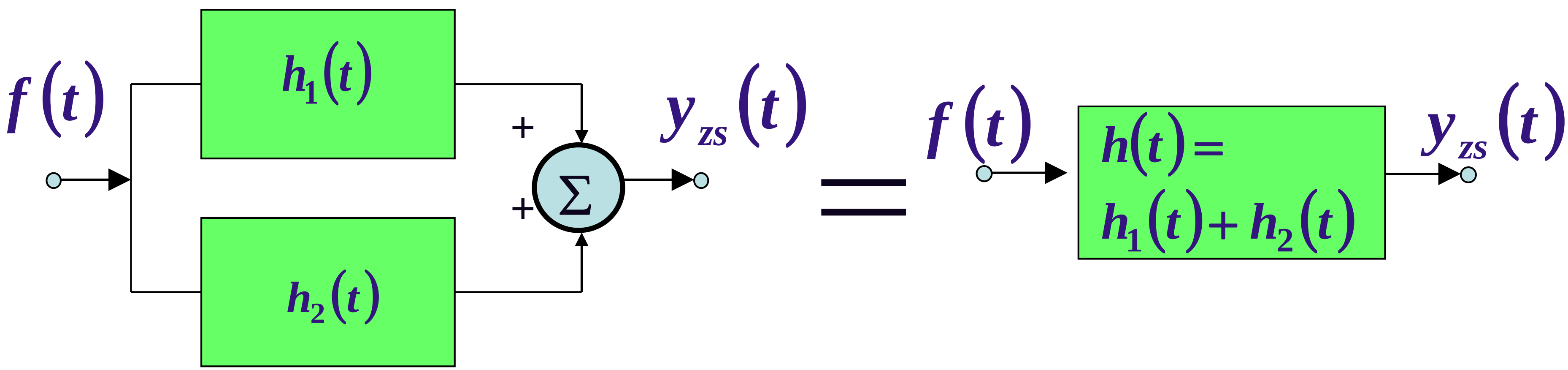
$$=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t)$$

2.4 卷积

■ 卷积的性质

分配律的应用

$$f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)]=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t)$$



$$y_{zs}(t)=f(t)*h_1(t)+f(t)*h_2(t)$$
$$=f(t)*[h_1(t)+h_2(t)]$$

结论：并联系统的冲激响应，等于组成并联系统的各个子系统冲激响应之和。

2.4 卷积

■ 卷积的性质

- 卷积代数

3. 结合律 $[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t)=f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]$

证明:

$$[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t)=\int_{-\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\lambda)f_2(\tau-\lambda)d\lambda]f_3(t-\tau)d\tau$$

二重积分改变积分次序

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\lambda)[\int_{-\infty}^{\infty}f_2(\tau-\lambda)f_3(t-\tau)d\tau]d\lambda$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\lambda)[\int_{-\infty}^{\infty}f_2(\tau)f_3(t-\tau-\lambda)d\tau]d\lambda$$

$$=f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]$$

■ 卷积的性质

结合律的应用

$$[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t)=f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]$$

$$f(t)\longrightarrow\boxed{h_1(t)}\longrightarrow\boxed{h_2(t)}\longrightarrow y_{zs}(t)$$

$$=\qquad\qquad =$$

$$f(t)\longrightarrow\boxed{h_2(t)}\longrightarrow\boxed{h_1(t)}\longrightarrow y_{zs}(t)$$

$$f(t)\longrightarrow\boxed{h(t)=h_1(t)*h_2(t)}\longrightarrow y_{zs}(t)$$

$$\because [f(t)*h_1(t)]*h_2(t)=f(t)*[h_1(t)*h_2(t)]$$

$$[f(t)*h_2(t)]*h_1(t)=f(t)*[h_2(t)*h_1(t)]$$

$$=f(t)*[h_1(t)*h_2(t)]$$

结论：串联系统的冲激响应，等于组成串联系统的各个子系统的冲激响应的卷积。

卷积的性质

- 卷积的微分与积分

1. 两个函数卷积之后的导数，等于其中一函数的导数与另一函数的卷积。

$$\frac{d}{dt}[f_1(t)*f_2(t)] = f_1(t)*\frac{d}{dt}f_2(t) = \frac{d}{dt}f_1(t)*f_2(t)$$

2. 两个函数卷积之后的积分，等于其中一函数的积分与另一函数的卷积。

$$\int_{-\infty}^{t}[f_1(\tau)*f_2(\tau)]d\tau = f_1(t)*\int_{-\infty}^{t}f_2(\tau)d\tau = f_2(t)*\int_{-\infty}^{t}f_1(\tau)d\tau$$

推论：

若 $f(t)=f_1(t)*f_2(t)$,则

$$f^{(m)}(t)=f_1^{(n)}(t)*f_2^{(m-n)}(t)$$

$$f(t)=f_1^{(1)}(t)*f_2^{(-1)}(t)$$

前提：$f_1(-\infty)=f_2(-\infty)=0$

$f^{(n)}(t)$：

$n<0$ 表示 n 重积分

$n>0$ 表示 n 阶导数

$$f_1(t)=\int_{-\infty}^{t}\frac{df_1(t)}{dt}dt$$

$$f_1(t)*f_2(t)=f_1'(t)*f_2^{(-1)}(t)$$

卷积的性质

- **卷积的微分与积分**

LTI系统的零状态响应等于激励与系统冲激响应的卷积积分，利用上面的结论可得：

$$
\boxed{\begin{aligned} y_{zs}(t) &= f(t)*h(t) = f^{(1)}(t)*h^{(-1)}(t) = f^{(1)}(t)*g(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f^{'}(\tau)g(t-\tau)d\tau \end{aligned}}
$$

上式称为杜阿密尔积分。

其物理含义为：LTI系统的零状态响应等于激励的导数$f'(t)$与系统的阶跃响应$g(t)$的卷积积分。

■ 卷积的性质

- 与冲击函数或阶跃函数的卷积

1. 函数 $f(t)$ 与单位冲激函数 $\delta(t)$ 的卷积仍然是函数 $f(t)$ 本身。

$$f(t)*\delta(t)=\delta(t)*f(t)=f(t)$$

证明：

$$f(t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\delta(\tau-t)d\tau=f(t)$$

2. 函数 $f(t)$ 与信号 $\delta(t-t_0)$ 相卷积的结果，相当于把函数本身延迟 t_0 。

$$f(t)*\delta(t-t_0)=\delta(t-t_0)*f(t)=f(t-t_0)$$

证明：

$$f(t)*\delta(t-t_0)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\delta(t-\tau-t_0)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\delta(\tau-(t-t_0))d\tau=f(t-t_0)$$

卷积的性质

- **与冲击函数或阶跃函数的卷积**

3. 对冲击偶$\delta'(t)$有

$$f(t)*\delta'(t)=f'(t)$$

4. 对单位阶跃函数 $u(t)$ 有

$$f(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau$$

5. 推广：

$$f(t)*\delta^{(k)}(t)=f^{(k)}(t)$$

$$f(t)*\delta^{(k)}(t-t_0)=f^{(k)}(t-t_0)$$

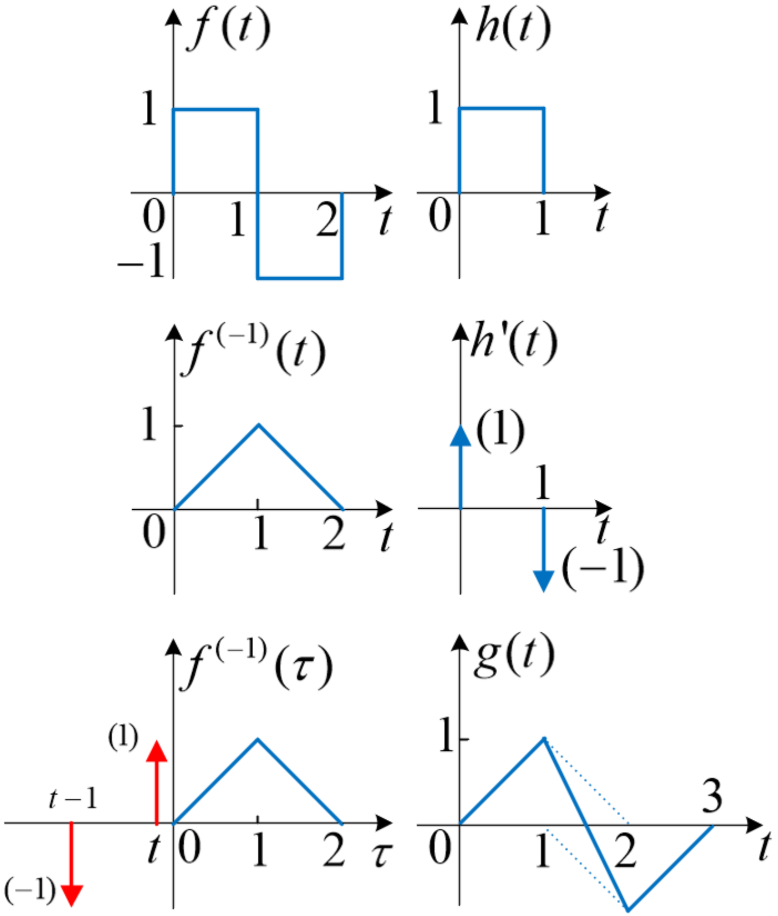
卷积的性质

- **与冲击函数或阶跃函数的卷积**

例：已知 $f(t), h(t)$，求 $g(t) = f(t) * h(t)$.

$$g(t) = f^{(-1)}(t) * h^{(1)}(t)$$

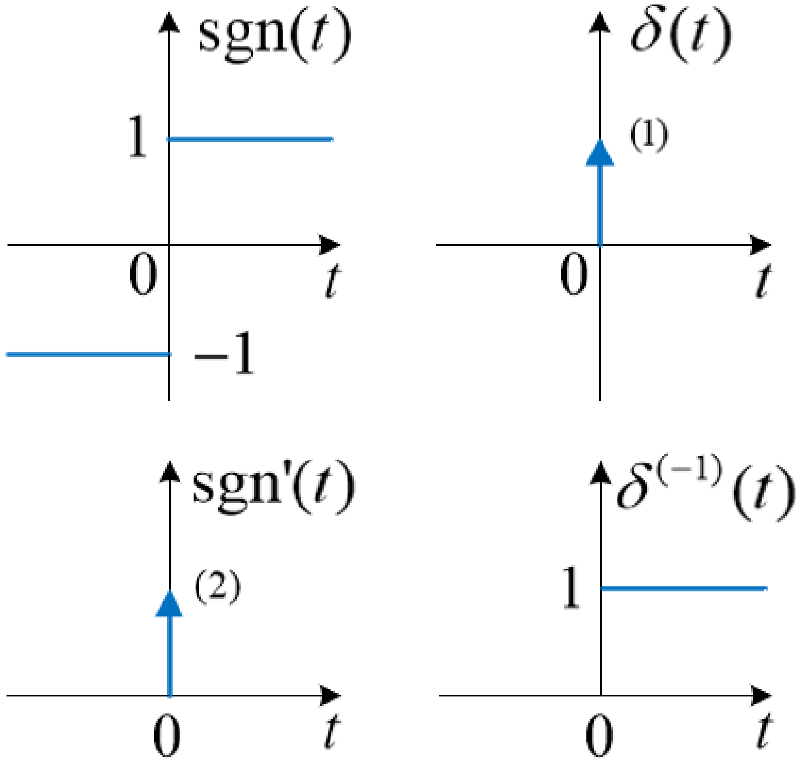
$$= \begin{cases} t & 0 \le t < 1 \\ 3-2t & 1 \le t < 2 \\ t-3 & 2 \le t \le 3 \\ 0 & t < 1 \ \ or \ \ t > 3 \end{cases}$$

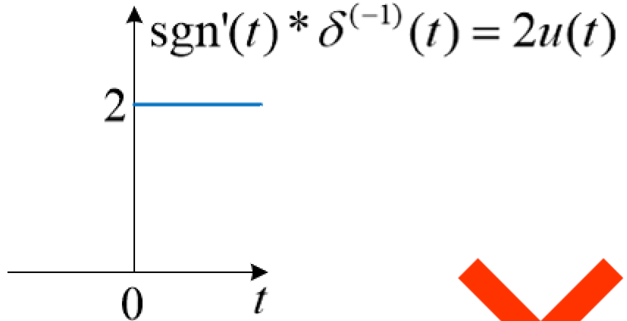


■ 卷积的性质

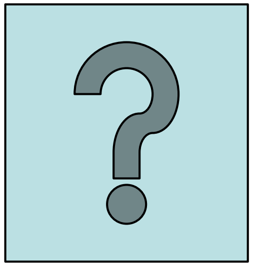
- 与冲击函数或阶跃函数的卷积

例：求 $g(t)=\mathrm{sgn}(t)*\delta(t).$





$$
\begin{aligned}
g(t) &= \mathrm{sgn}^{(1)}(t)*\delta^{(-1)}(t) \\
&= 2\delta(t)*u(t) \\
&= 2u(t)
\end{aligned}
$$



$$g(t)=\mathrm{sgn}(t)*\delta(t)=\mathrm{sgn}(t)$$

$$\int_{-\infty}^{t}\frac{d}{dt}\mathrm{sgn}(t)dt \neq \mathrm{sgn}(t)$$

卷积的应用举例

- 求系统的零状态响应

$$r_{zs}(t)=h(t)*e(t)$$

例：一线性时不变的连续时间系统，初始状态一定，当输入$e_1(t)=\delta(t)$时，全响应为 $r_1(t)=-3e^{-t}u(t)$ ；当输入 $e_2(t)=u(t)$ 时，全响应为 $r_2(t)=(1-5e^{-t})u(t)$。求当输入$e_3(t)=tu(t)$ 时的全响应。

解：

$$r_1(t)=r_{zi}(t)+h(t)=-3e^{-t}u(t)$$

$$r_2(t)=r_{zi}(t)+g(t)=(1-5e^{-t})u(t)$$

$$h(t)=\tfrac{d}{dt}g(t)$$

$$g'(t)-g(t)=(2e^{-t}-1)u(t)$$

$$g(t)=(1-e^{-t})u(t)$$

$$h(t)=g'(t)=e^{-t}u(t)$$

$$r_{zi}(t)=-4e^{-t}u(t)$$

$$r_3(t)=r_{zi}(t)+e_3(t)*h(t)$$

$$=-4e^{-t}u(t)+(t-1+e^{-t})u(t)$$

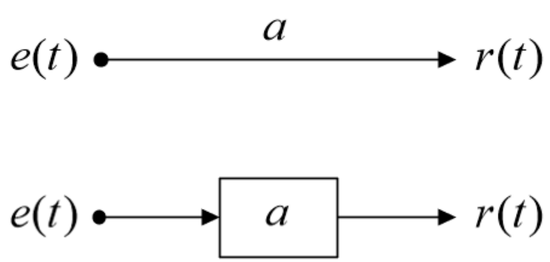
$$=(t-1-3e^{-t})u(t)$$

2.4 卷积

卷积的应用举例

- 一些常见框图基本单元的冲激响应

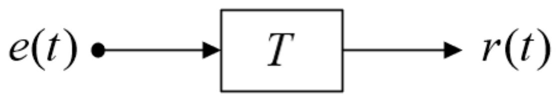
1. 标量乘法器



$$r(t) = ae(t)$$

$$h(t) = a\delta(t)$$

2. 延时器



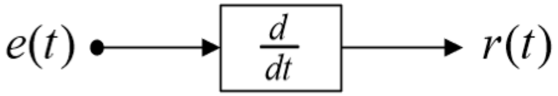
$$r(t) = e(t-T)$$

$$h(t) = \delta(t-T)$$

■ 卷积的应用举例

- 一些常见框图基本单元的冲激响应

3. 微分器



$$r(t)=\frac{d}{dt}e(t)$$

$$h(t)=\delta'(t)$$

3. 积分器

$$r(t)=\int_{-\infty}^{t}e(\tau)d\tau$$

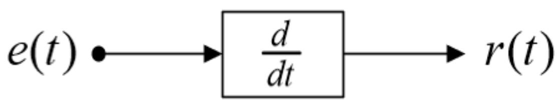
$$h(t)=u(t)$$

2.4 卷积

■ 卷积的应用举例

- 一些常见框图基本单元的冲激响应

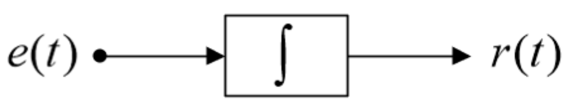
3. 微分器



$$r(t)=\frac{d}{dt}e(t)$$

$$h(t)=\delta'(t)$$

3. 积分器



$$r(t)=\int_{-\infty}^{t}e(\tau)d\tau$$

$$h(t)=u(t)$$

总结

连续时间系统时域分析

经典法 $r(t)=r_h(t)+r_p(t)$

- 齐次解 $r_h(t)$
- 特解 $r_p(t)$

双零法 $r(t)=r_{zi}(t)+r_{zs}(t)$

- 零输入响应： $r_{zi}(t)$ 　齐次解 + 特解（经典法）（无跳变） $\overset{0}{\|}$
- 零状态响应 $r_{zs}(t)$
  - 齐次解 + 特解
  - $e(t)*h(t)$（卷积法）

$h(t)$：经典法

起始点跳变