《信号与系统》

吉小鹏

南京信息工程大学 电子与信息工程学院 尚贤楼209

Tel：13914781118，微信同号

QQ：99210291

E-mail: 003163@nuist.edu.cn



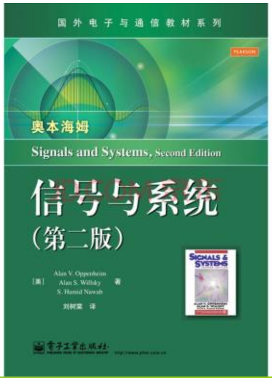

课堂要求与考核

- 上课不能迟到、早退
- 课堂上不允许吃零食，但允许喝水
- 课堂上手机关机、静音或调成振动模式，有急事可到教室外接电话！
- 亲自做作业，按时交作业
- ✓ 考核方法：

  参见qq群“文件”中的《信号与系统考核标准.doc》

教材及课程资源

- **教材**
  - 《信号与系统(MATLAB实现)》，张艳萍、常建华等，清华大学出版社，2020年01月第1版
- **参考书目**
  - 郑君里，应启珩，杨为理，《信号与系统》（第三版），高等教育业出版社，2011
  - 奥本海姆编著，刘树棠译，《信号与系统》（第二版），电子工业出版社，2013



教材及课程资源

- **电子资源**
- 《信号与系统分析》，清华大学公开课，**https://www.xuetangx.com/course/THU56031000418/5882987**
- **MOOC**，国家精品课程
- 《信号与系统：模拟与数字信号处理》，**MIT**公开课，**http://open.163.com/newview/movie/courseintro?newurl=%2Fspecial%2Fopencourse%2Fsignals.html**

《信号与系统》

第1章 绪论

吉小鹏

E-mail: 003163@nuist.edu.cn

南京信息工程大学 电子与信息工程学院 尚贤楼207



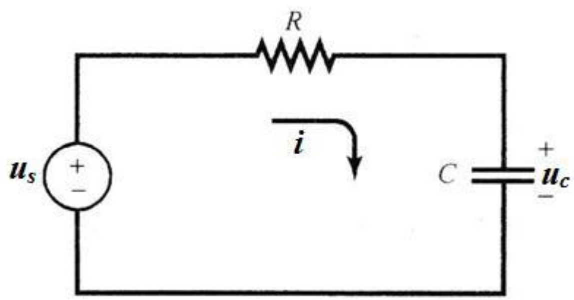

提纲

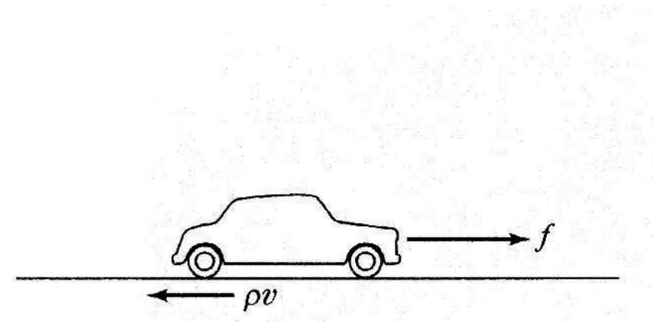
- 信号的概念、描述和分类
- 信号的基本运算
- 典型信号
- 系统的概念和分类

1.1 引言

信号(signal)

- 消息的表现形式或传送载体，消息是信号的传送内容。





信号：电容电压$u_c(t)$或回路电流$i(t)$

信号：汽车速度$v(t)$

消息(message)

- 在通信系统中，一般将语言、文字、图像或数据统称为消息。

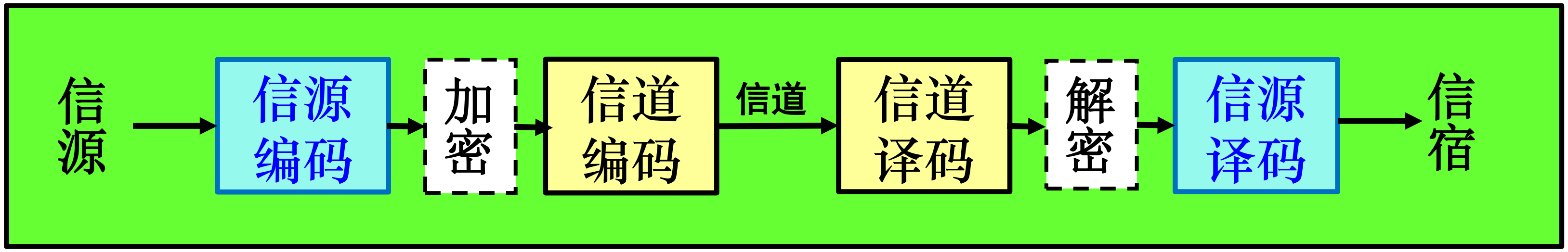
信息(information)

- 事物运动状态或存在方式的不确定性描述。
- 一般指消息中赋予人们的新知识、新概念。

■ 系统(system)

- 系统是指若干相互关联的事物组合而成具有特定功能的整体。

- 系统的基本作用是对输入信号进行加工和处理，将其转换为所需要的输出信号。



1.2 信号的数学描述与分类

信号的数学描述

- **函数描述：**信号描述为一个或若干个自变量的函数或序列的形式。

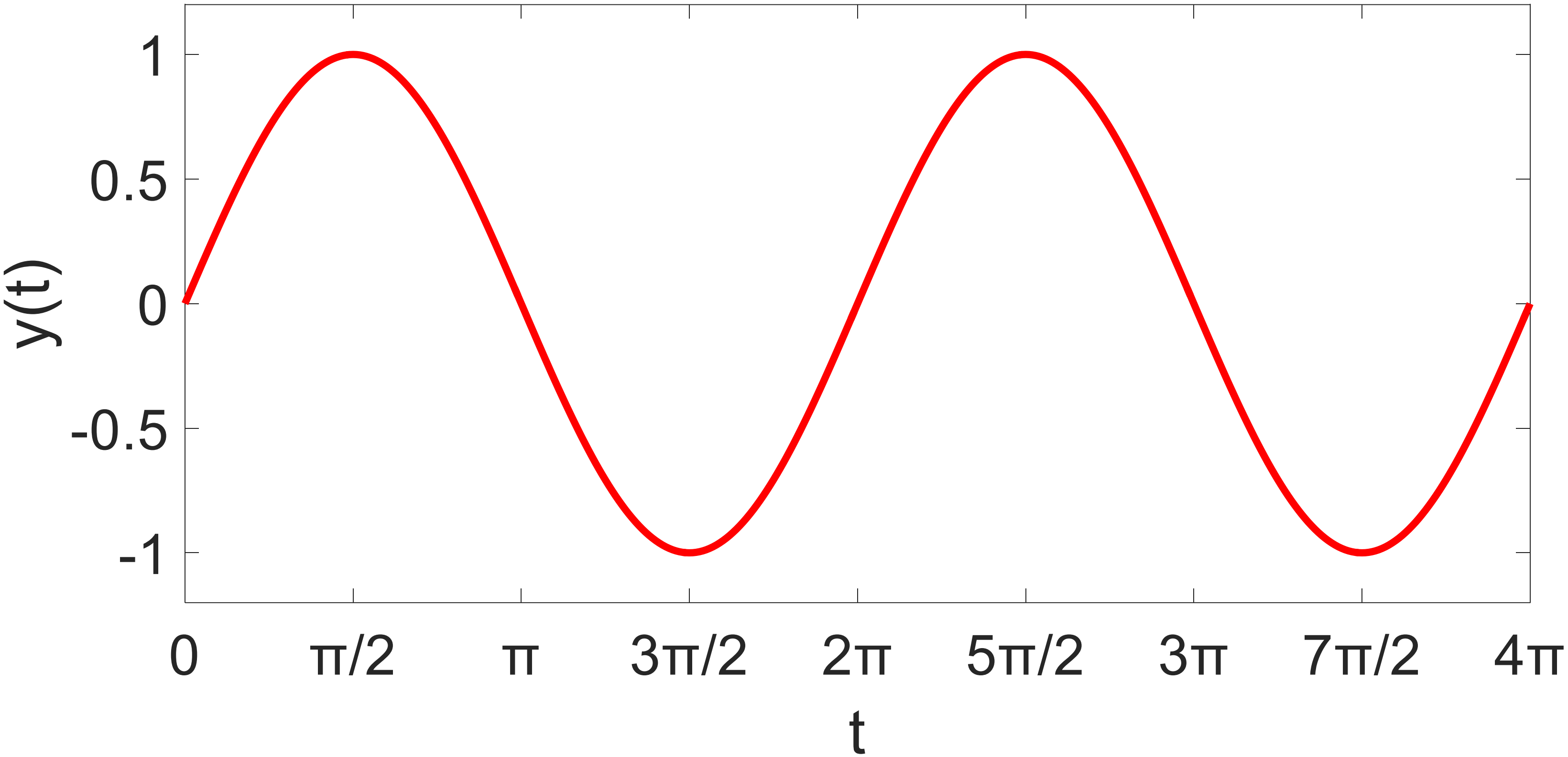
$$y(t)=\sin(t) \qquad u(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t>0\end{cases}$$

"信号" 和 "函数" 常相互通用。

1.2 信号的数学描述与分类

信号的数学描述

- **图形描述：**用图形描述信号。

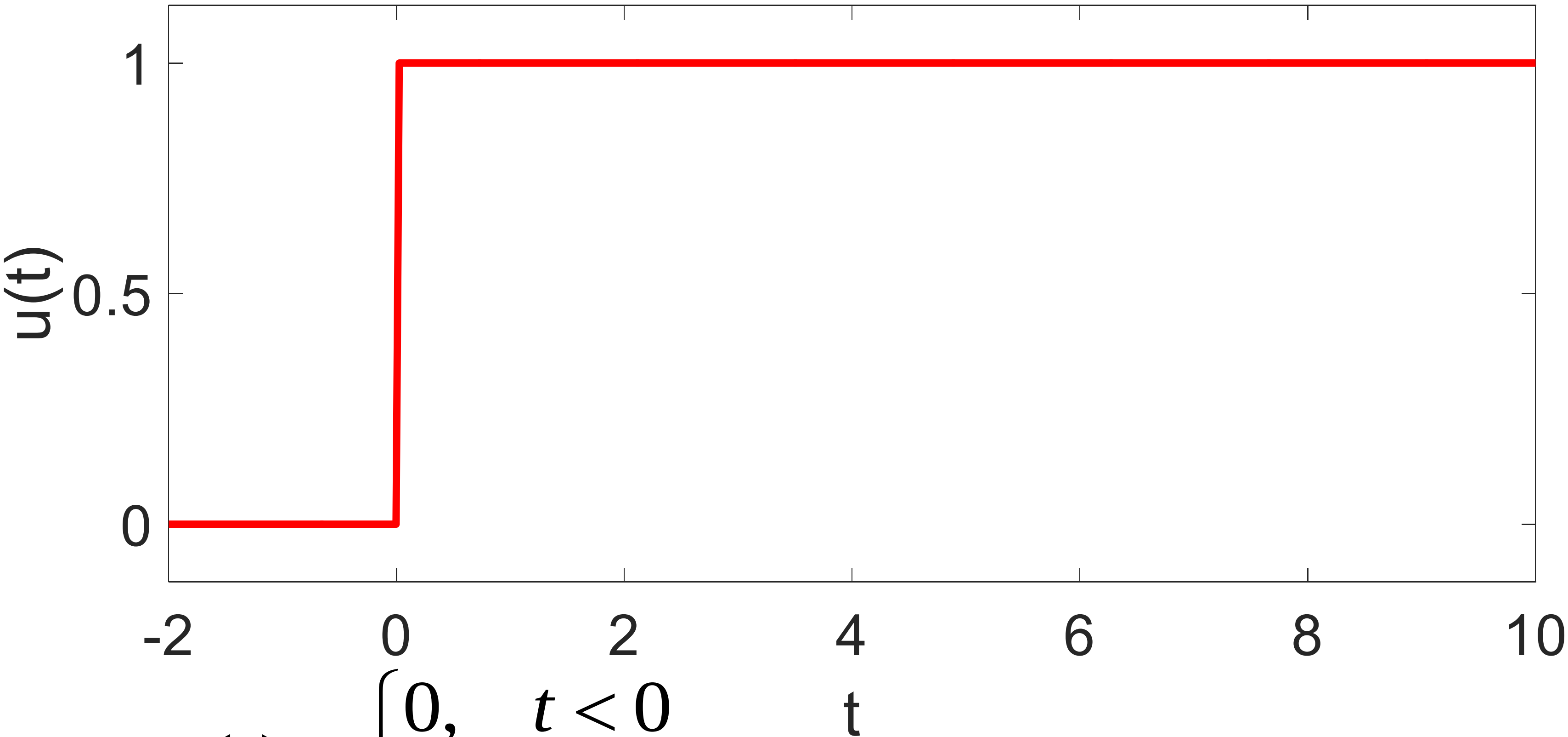


$$y(t) = \sin(t)$$

1.2 信号的数学描述与分类

■ 信号的数学描述

- **图形描述：**用图形描述信号。



$$u(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t>0\end{cases}$$

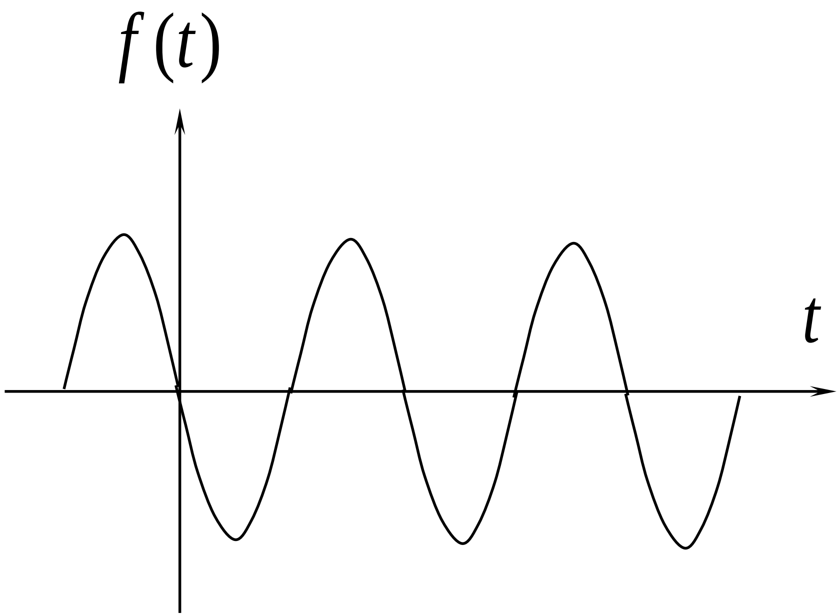
■ 信号的数学描述

- **列举描述：**列举出信号值的描述方法。

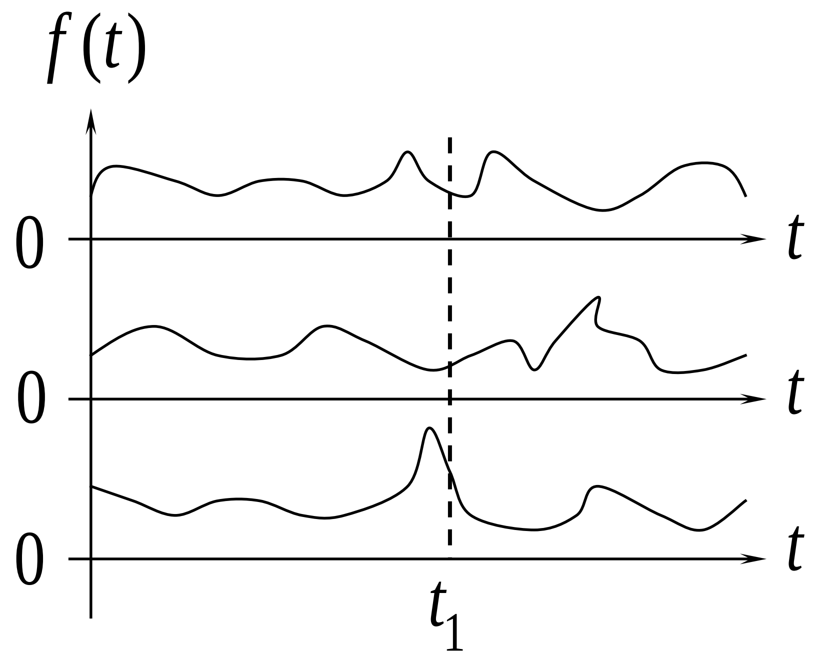
$$x[n]=[\underset{\substack{\uparrow\\0}}{1},\quad \underset{\substack{\uparrow\\1}}{2},\quad \underset{\substack{\uparrow\\2}}{0.5}]$$

信号的分类

- **确定信号：** 可以用确定时间函数表示的信号 。
- **随机信号：** 信号不能用确切的函数描述，它在任意时刻的取值都具有不确定性，只可能知道它的统计特性 。

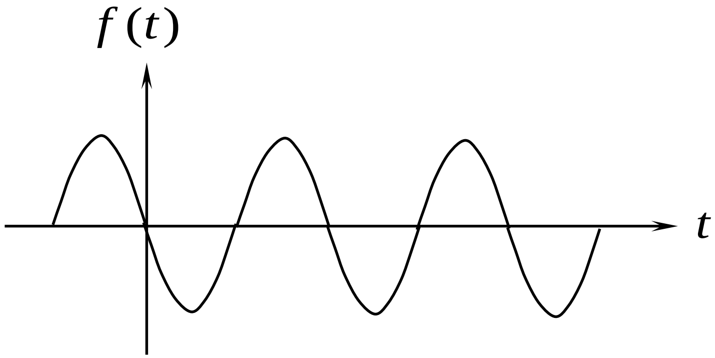


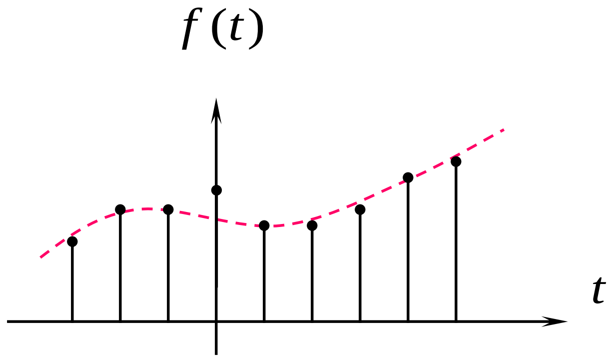
$$f(t) = -\sin(t)$$

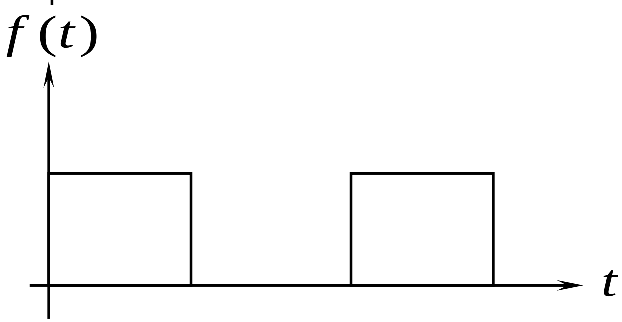


信号的分类

- **连续（时间）信号：** 在连续的时间范围内，除去若干不连续的点之外均有定义的信号称为连续时间信号，简称连续信号。
- **离散（时间）信号：** 仅在一些规定的离散的瞬间才有定义的信号称为离散时间信号，简称离散信号。







离散信号通常取等间隔T，表示为f(kT)，简写为f(k)，这种等间隔的离散信号也常称为序列。

1.2 信号的数学描述与分类

■ 信号的分类

- **连续（时间）信号：**在连续的时间范围内，除去若干不连续的点之外均有定义的信号称为连续时间信号，简称连续信号。
- **离散（时间）信号：**仅在一些规定的离散的瞬间才有定义的信号称为离散时间信号，简称离散信号。

- **模拟信号 vs 连续信号？**
- **数字信号 vs 离散信号？**

1.2 信号的数学描述与分类

信号的分类

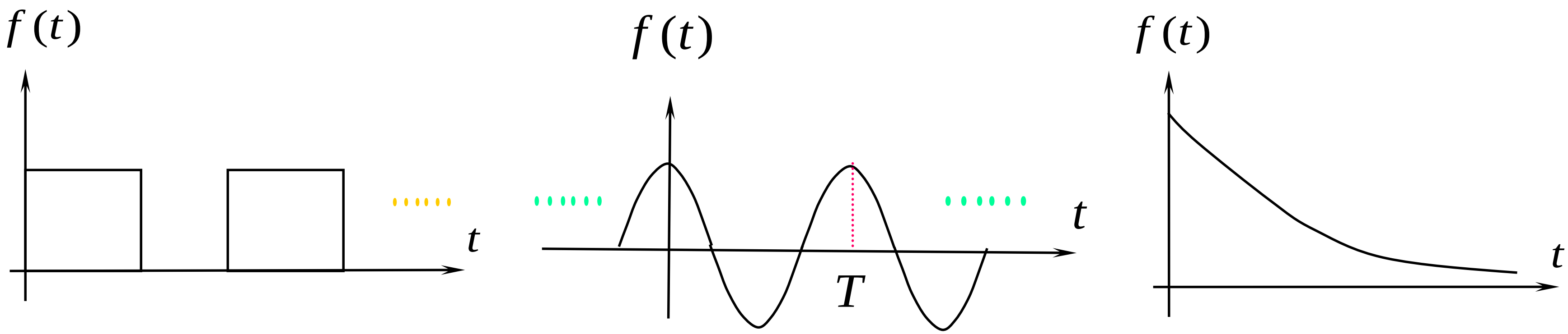
- **周期信号：**每隔一定时间，按相同规律重复变化的信号。 (在较长时间内重复变化)

  连续周期信号 f(t) 满足 $f(t) = f(t + mT)$

  离散周期信号 f(k) 满足 $f(k) = f(k + mN)$

  满足上述关系的**最小**T(或**整数**N)称为该信号的**周期**。

- **非周期信号：**不具有周期性的信号称为非周期信号。



1.2 信号的数学描述与分类

■ 信号的分类（周期/非周期）

［例1-1］判断下列信号是否为周期信号，若是，确定其周期。

（1）$f1(t) = \sin 2t + \cos 3t$

（2）$f2(t) = \cos 2t + \sin \pi t$

分析： 两个周期信号x(t)，y(t)的周期分别为T1和T2，若其周期之比T1/T2为有理数，则其和信号x(t)+y(t)仍然是周期信号，其周期为T1和T2的最小公倍数。

■ 信号的分类（周期/非周期）

［例1-1］判断下列信号是否为周期信号，若是，确定其周期。

（1）$f1(t) = \sin 2t + \cos 3t$

（2）$f2(t) = \cos 2t + \sin \pi t$

解：

（1）sin2t 是周期信号，其角频率和周期分别为

$\omega 1 = 2\ rad/s$ ，　$T1 = 2\pi/\omega 1 = \pi\ s$

cos3t 是周期信号，其角频率和周期分别为

$\omega 2 = 3\ rad/s$ ，　$T2 = 2\pi/\omega 2 = (2\pi/3)\ s$

由于T1/T2= 3/2为有理数，故**f1(t)为周期信号**，

其**周期为T1和T2的最小公倍数2π**。

信号的分类（周期/非周期）

[例1-1] 判断下列信号是否为周期信号，若是，确定其周期。

（1）$f1(t) = \sin 2t + \cos 3t$

（2）$f2(t) = \cos 2t + \sin \pi t$

解：

（2）$\cos 2t$ 是周期信号，其角频率和周期分别为

$\omega 1 = 2\ rad/s$， $T1 = 2\pi / \omega 1 = \pi\ s$

$\sin \pi t$ 是周期信号，其角频率和周期分别为

$\omega 2 = \pi\ rad/s$， $T2 = 2\pi / \omega 2 = 2\ s$

由于 $T1/T2 = \pi/2$ 为无理数，故f2(t)为非周期信号。

信号的分类（周期/非周期）

[例1-2] 判断下列正弦序列是否周期序列，若是周期序列请确定其周期。

（1）$f1(k) = \sin(3\pi k/4) + \cos(0.5\pi k)$

（2）$f2(k) = \sin(2k)$

分析：正弦序列

$$f(k)=\sin(\beta k)=\sin(\beta k+m2\pi)=\sin[\beta(k+m2\pi/\beta)]=\sin[\beta(k+mN)]$$

当正弦序列具有周期性时要求N或mN为整数，且此整数位序列的周期。因此，

- 当$N=2\pi/\beta$为整数时，序列为周期序列，且周期为N；
- 当$N=m2\pi/\beta$为有理数时，序列为周期序列，且周期为MN，M为是的MN为整数的最小整数；
- 当$N=m2\pi/\beta$为无理数时，序列为非周期序列。

信号的分类（周期/非周期）

［例1-2］判断下列正弦序列是否周期序列，若是周期序列请确定其周期。

（1）$f1(k) = \sin(3\pi k/4) + \cos(0.5\pi k)$

（2）$f2(k) = \sin(2k)$

解：

（1） $\sin(3\pi k/4)$， $\beta = 3\pi/4$， $N=2\pi/\beta = 2\pi/(3\pi/4)=8/3$为有理数，所以序列为周期序列，且周期为8；

$\cos(0.5\pi k)$， $\beta = 0.5\pi$， $N=2\pi/\beta = 2\pi/(0.5\pi)=4$为整数，所以序列为**周期序列，且周期为4**；

所以$f1(k)$为周期序列，其周期为8。

（2） $\sin(2k)$， $\beta = 2$， $N=2\pi/\beta = 2\pi/2=\pi$ 为无理数，所以$f2(k)$为**非周期序列**。

■ 信号的分类（周期/非周期）

小结：

（1）连续正弦信号一定是周期信号，而正弦序列不一定是周期信号；

（2）连续周期信号之和不一定是周期信号，而周期序列之和一定是周期序列。

1.2 信号的数学描述与分类

信号的分类

连续信号可看作是随时间变化的电压或电流，信号 $f(t)$在 1 欧姆的电阻上的瞬时功率为$|f(t)|^2$，在时间区间所消耗的总能量和平均功率分别定义为：

总能量 $E=\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2dt$ 平均功率 $P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2dt$

- **能量信号**：信号总能量为有限值而信号平均功率为零。
- **功率信号**：平均功率为有限值而信号总能量为无限大。

若信号$f(t)$的能量有界，即 $E<\infty$,则称其为能量有限信号，简称能量信号。此时 $P=0$ 。

若信号$f(t)$的功率有界，即 $P<\infty$,则称其为功率有限信号，简称功率信号。此时 $E=\infty$ 。

1.2 信号的数学描述与分类

■ 信号的分类（能量/功率）

- 信号 f (t)可以是一个既非功率信号，又非能量信号。

  如单位斜坡信号、指数信号$f(t)=e^t$，其功率和能量都是无穷 。

- 一个信号不可能同时既是功率信号，又是能量信号。
- 周期信号属于功率信号。
- 非周期信号可能是能量信号 [$t\to\infty$, $f(t)=0$]， 也可能是功率信号[$t\to\infty$, $f(t)\neq 0$]。
- 时限信号（仅在有限时间区间不为零的信号）为能量信号。

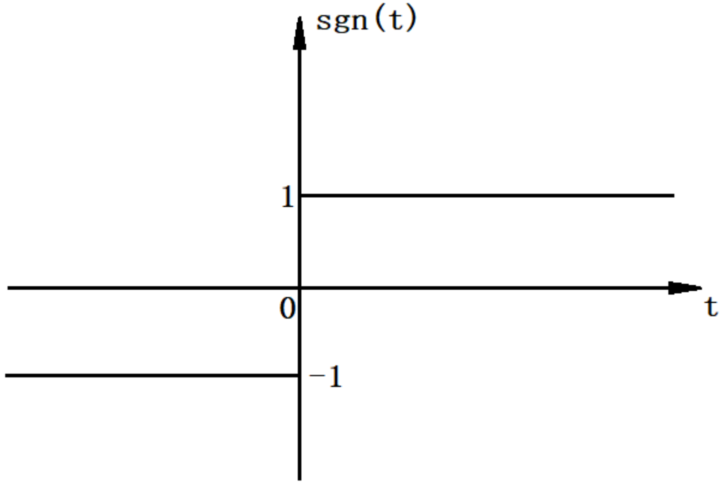
■ 信号的分类（能量/功率）

3. 下列说法正确的是

(A) 周期信号为能量信号　　(B) 时限信号为功率信号

(C) $\varepsilon(t)$是功率信号　　(D) e^t为能量信号

【答案】



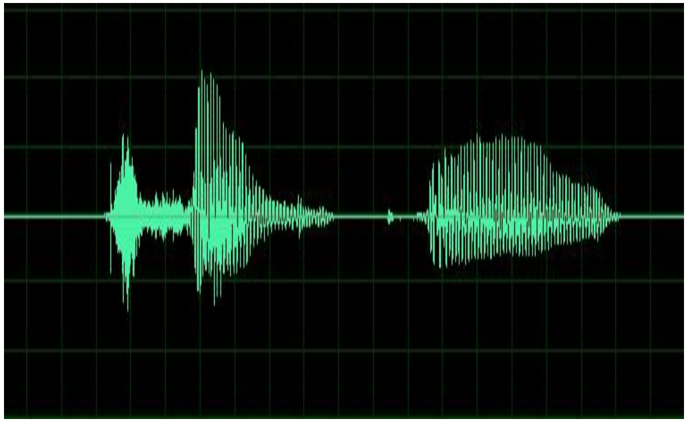
sign：记作sgn，符号。

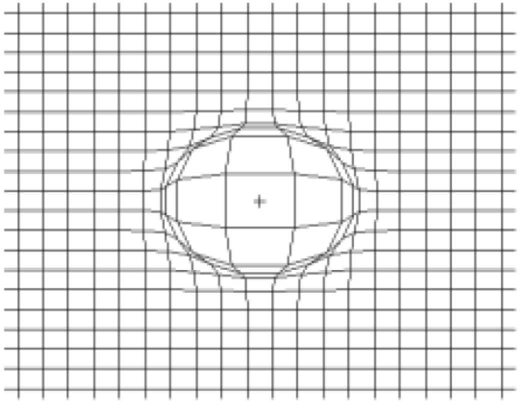
请问符号函数sgn(t)是功率信号还是能量信号？如果是功率信号，计算其平均功率。

1.2 信号的数学描述与分类

信号的分类

- 信号可以表示为一个或多个变量的函数，称为**一维**或**多维函数**。
- 语音信号可表示为声压随时间变化的函数，这是一维信号。
- 一张黑白图像每个点（像素）具有不同的光强度，任一点又是二维平面坐标中两个变量的函数，这是二维信号。
- 还有更多维变量的函数的信号。
- 本课程只研究一维信号，且自变量多为时间。





信号的分类

- **因果信号：**常将t=0（参考点）时接入系统的信号f(t)，即在t<0时f(t)=0，称为因果信号或者**有始信号**。如阶跃信号。
- 若t <0 时 f (t)>0 ，t ≥ 0时 f(t) =0的信号称为**反因果信号**。
- **注意**：非因果信号指的是在时间零点之前有非零值。

1.3 基本连续信号介绍

- 基本连续信号
  - 典型连续信号
    - 指数信号
    - 正弦信号
    - 复指数信号
    - $\mathrm{Sa}(t)$信号
    - 钟形信号
    - 斜变信号 **(奇异信号)**
  - 奇异信号
    - 阶跃信号
    - 冲击信号
    - 冲击偶信号

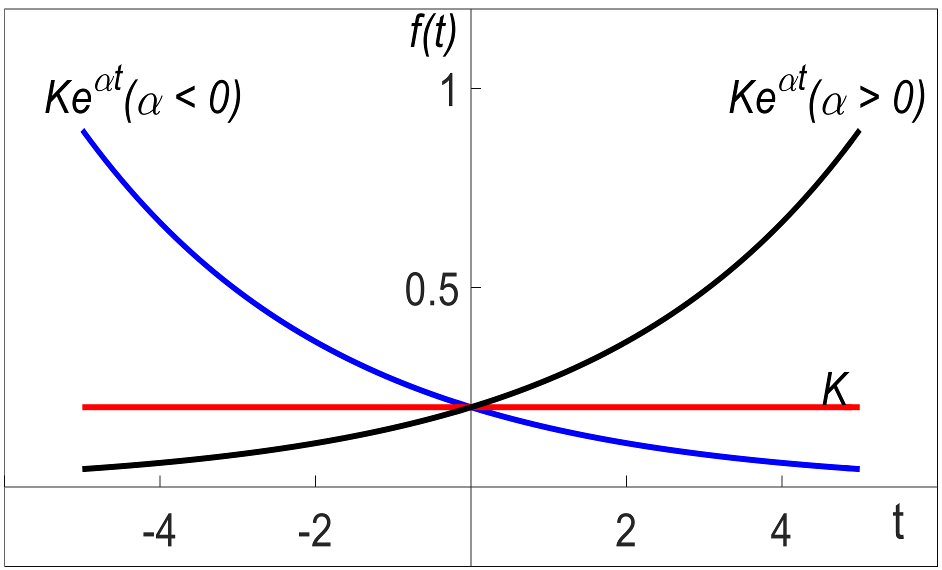
1.3 基本连续信号介绍

■ 典型连续信号

- 指数信号

定义：$f(t)=Ke^{\alpha t}$ ， α 是实数。

波形：



对时间的微分、积分仍为指数函数

- α > 0，信号随时间增长；
- α < 0，信号随时间衰减；
- α = 0，信号不随时间变化，是直流信号。

$\tau=\dfrac{1}{|\alpha|}$,指数信号的时间常数。

τ 越大，指数信号增长或衰减的速率越慢。

衰减指数信号：

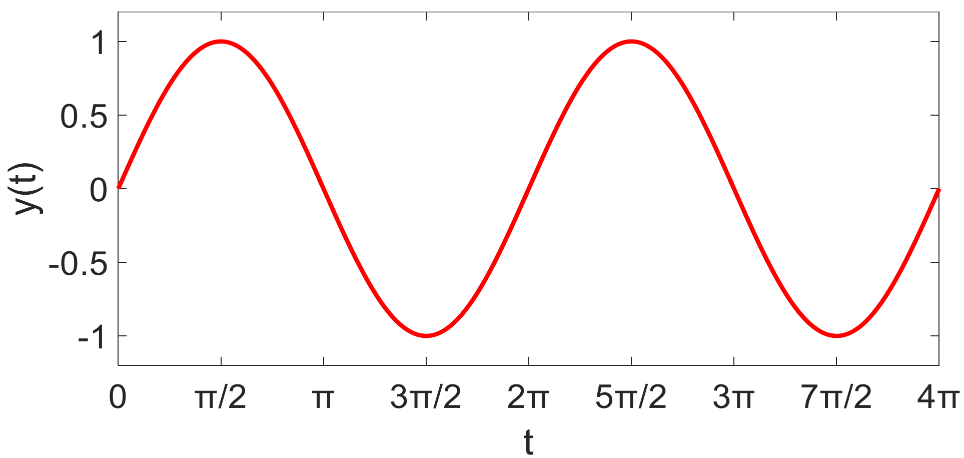
$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ e^{-\frac{t}{\tau}}, & t\geq 0\end{cases}$$

■ 典型连续信号

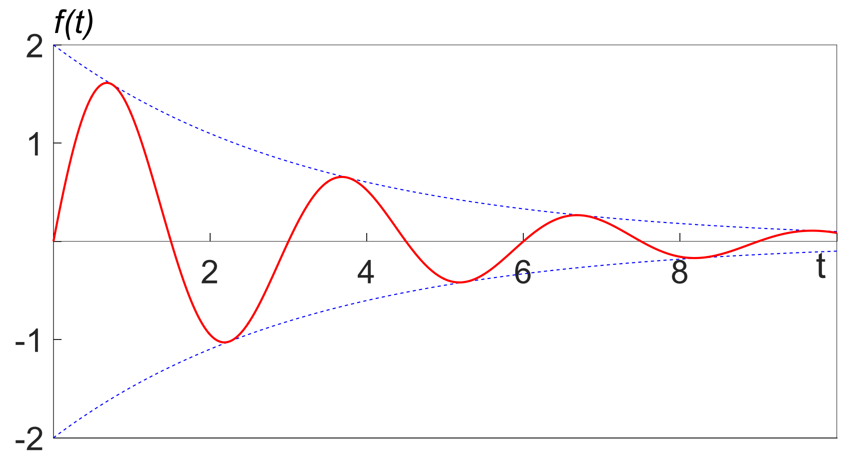
- 正弦信号

定义：$f(t)=K\sin(\omega t+\theta)$，K 为振幅，ω是角频率，θ称为初相位。

波形：



正弦信号



衰减的正弦信号

正弦信号是周期信号，周期T与角频率ω和频率f满足 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{1}{f}$

1.3 基本连续信号介绍

典型连续信号

- 复指数信号

定义：$f(t)=Ke^{st}$，其中s=σ+jω， σ 为复数s的实部， ω 为s的虚部。

可展开成复数形式：

$$f(t)=Ke^{st}=Ke^{(\sigma+j\omega)t}=Ke^{\sigma t}\cos(\omega t)+jKe^{\sigma t}\sin(\omega t)$$

- 实部、虚部为正（余）弦信号；
- σ表征实部与虚部的正、余弦信号的振幅随时间变化的情况；
- ω表示信号随角频率变化的情况。

$\sigma>0$时，增幅振荡正、余弦信号；

$\sigma<0$时，衰减振荡正、余弦信号；

$\sigma=0$时，等幅振荡正、余弦信号；

$\omega=0$时，实指数信号；

$\sigma=0$且$\omega=0$时，直流信号。

实际上无法产生复指数信号，

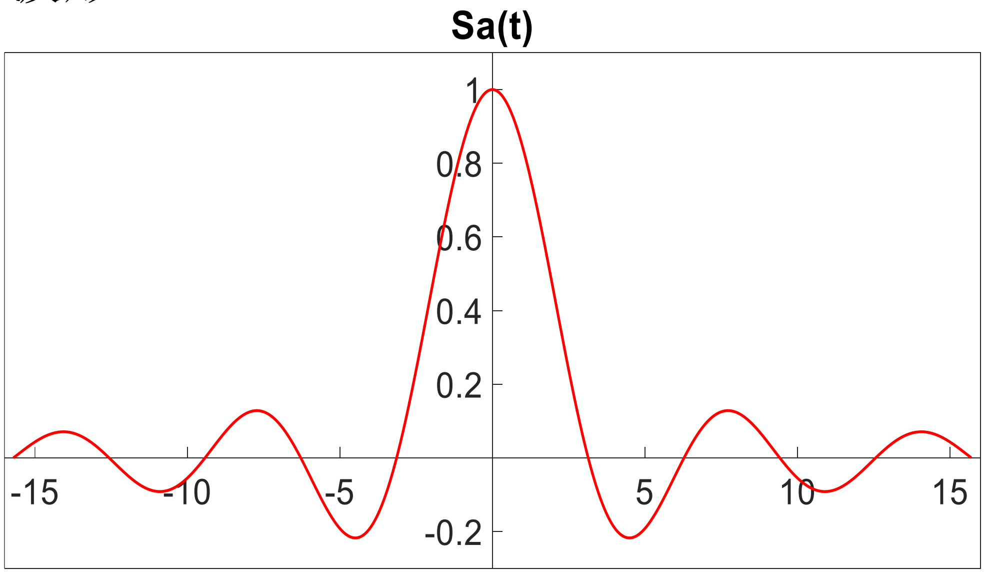
但可用于简化信号运算和分析！

■ 典型连续信号

- Sa(t)信号（抽样信号）

定义：$Sa(t)=\dfrac{\sin t}{t}$ 。

波形：



性质：

- 偶函数；
- t的正负两方向振幅衰减；
- Sa(0)=1，Sa(±nπ)=0；
- $\int_0^{+\infty} Sa(t)dt=\dfrac{\pi}{2}$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} Sa(t)dt=\pi$

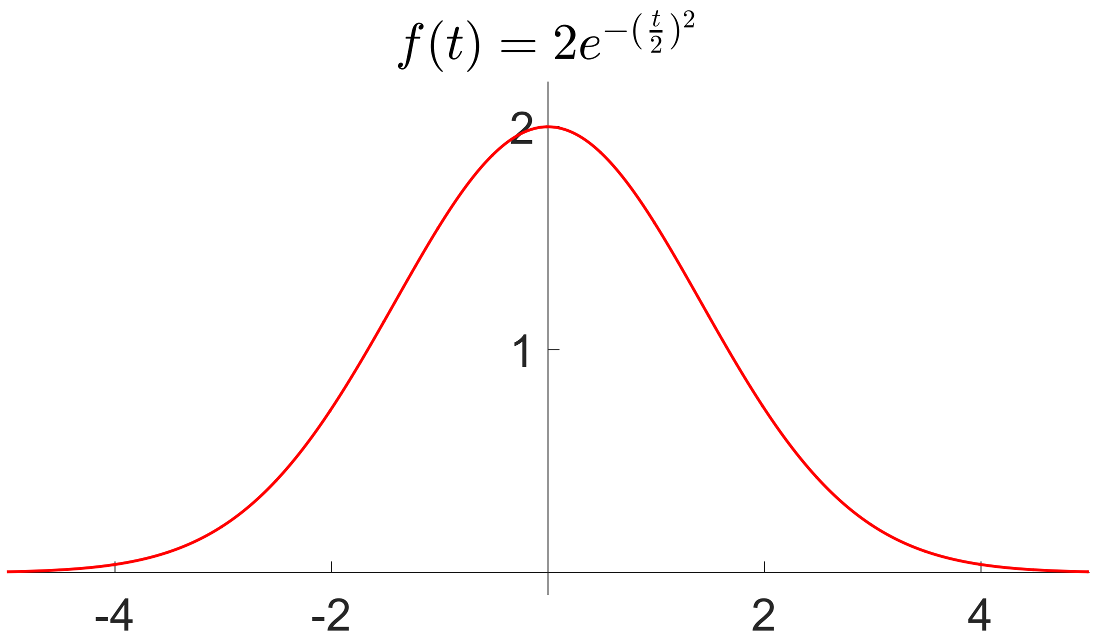
1.3 基本连续信号介绍

典型连续信号

- 钟形信号

定义：$f(t)=Ee^{-(\frac{t}{\tau})^2}$。

波形：



性质：

- 偶函数；
- t的正负两方向衰减；
- $f(0)=E$
- $f(\frac{\tau}{2})=Ee^{-\frac{1}{4}}\approx 0.78E$

高斯函数：

$$f(x)=ae^{-\frac{(x-b)^2}{2c^2}},(a>0)$$

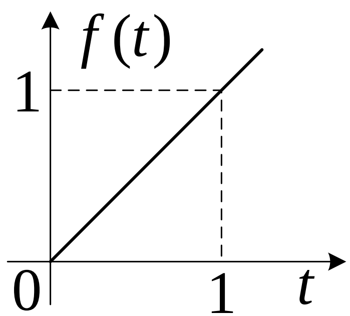
1.3 基本连续信号介绍

■ 典型连续信号

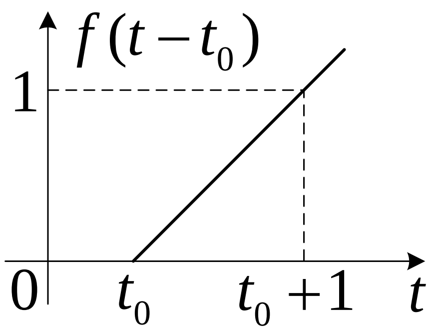
- 斜变信号

定义：从某一时刻开始随时间正比例增长的信号。又称斜坡（升）信号。

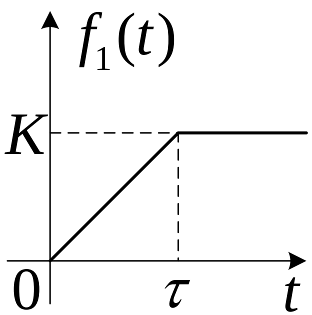
波形：



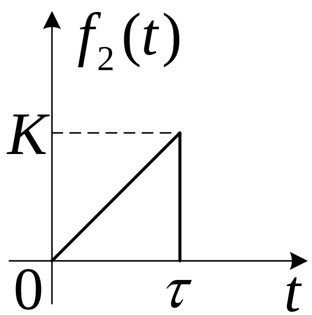
单位斜变信号



延迟的斜变信号



截平的斜变信号



三角形脉冲信号

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ t, & t\geq 0\end{cases}$$

$$f(t-t_0)=\begin{cases}0, & t<t_0\\ t-t_0, & t\geq t_0\end{cases}$$

$$f_1(t)=\begin{cases}\dfrac{K}{\tau}f(t), & t<\tau\\ K, & t\geq \tau\end{cases}$$

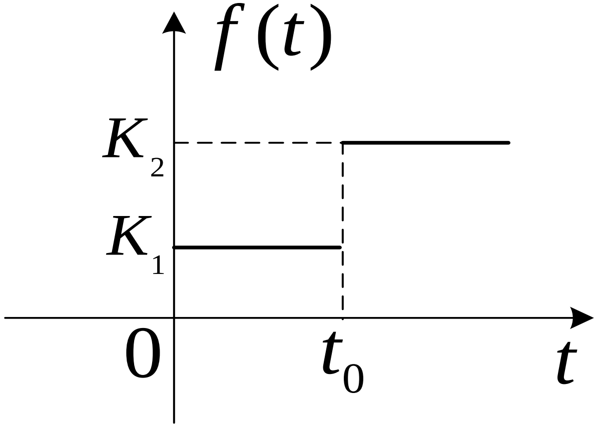
$$f_2(t)=\begin{cases}\dfrac{K}{\tau}f(t), & t\leq \tau\\ 0, & t>\tau\end{cases}$$

1.3 基本连续信号介绍

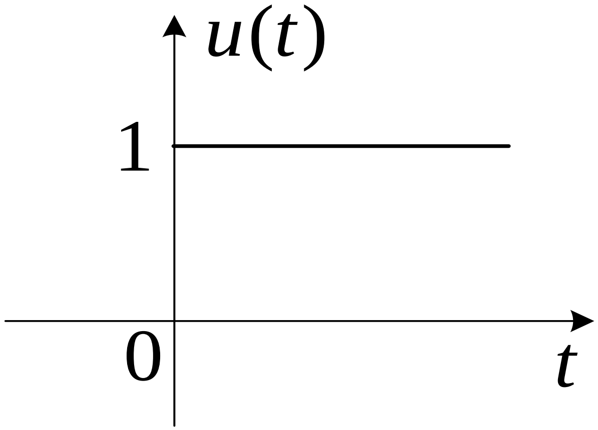
■ 奇异信号

- 阶跃信号

定义：在某一时刻发生有限值跳变的信号称为阶跃信号。



阶跃信号



单位阶跃信号

$$f(t)=\begin{cases}K_1, & t<t_0\\ K_2, & t>t_0\end{cases}$$

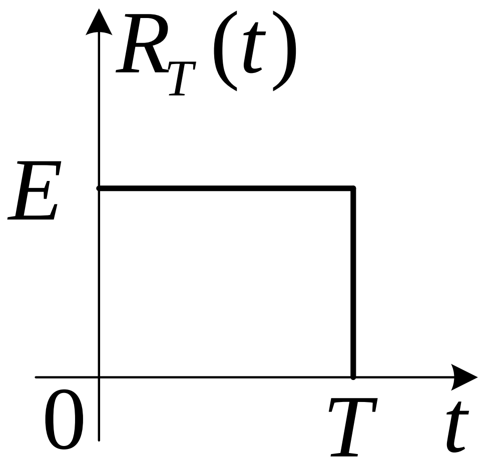
$$u(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t>0\end{cases}$$

性质：$\int_{-\infty}^{t}u(\tau)d\tau=tu(t)$（积分性质）

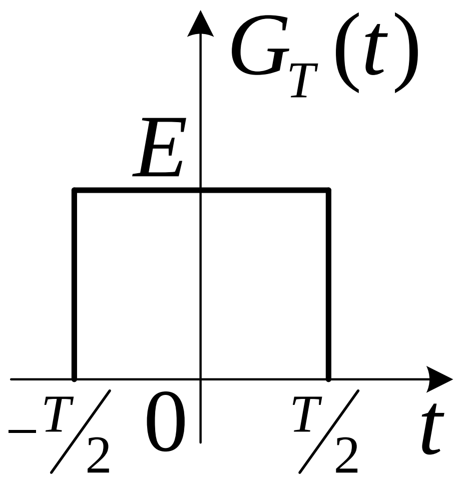
■ 奇异信号

- 阶跃信号

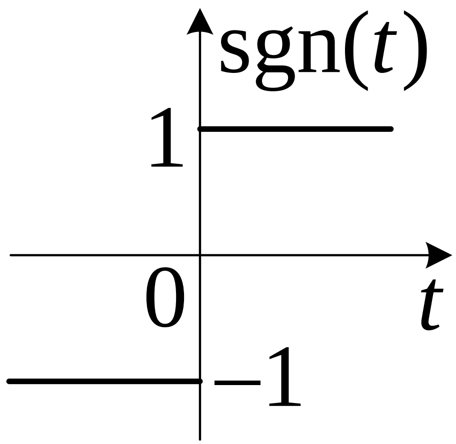
应用1：表示某些其他信号。



矩形脉冲信号



门函数



符号函数

$$R_T(t) = E[u(t) - u(t-T)]$$

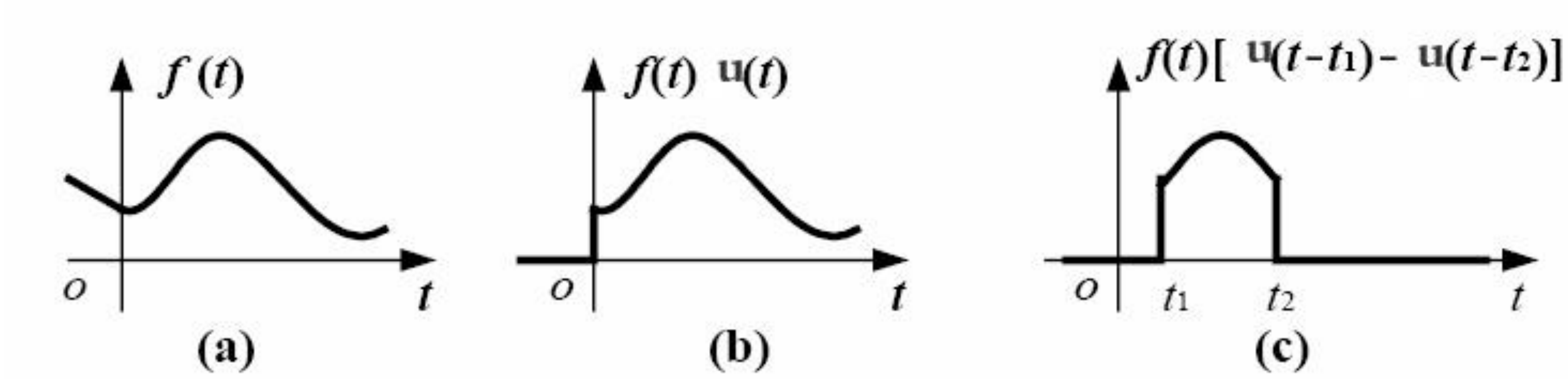
$$G_T(t) = E[u(t+\frac{T}{2}) - u(t-\frac{T}{2})]$$

$$\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} -1, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} = 2u(t) - 1$$

1.3 基本连续信号介绍

- 奇异信号
  - 阶跃信号

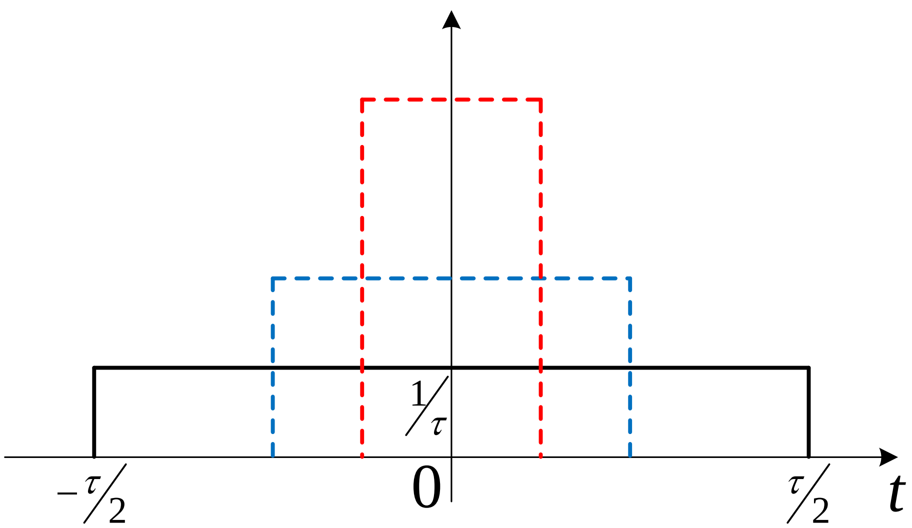
应用2：表示信号的作用区间（接入特性）。



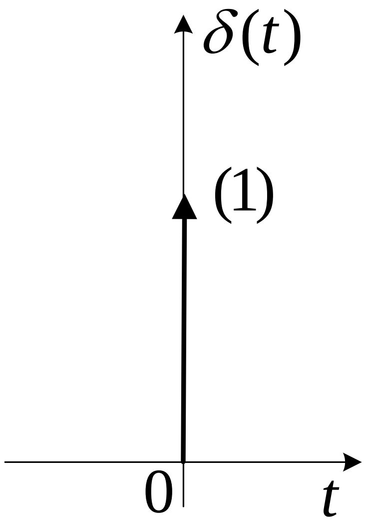
奇异信号

- 冲激信号

定义：描述发生**时间极短**但**强度极大**的信号所采用的理想化数学模型。



矩形脉冲 → 冲激函数



单位冲激函数

$$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau}[u(t+\frac{\tau}{2}) - u(t-\frac{\tau}{2})]$$

1.3 基本连续信号介绍

奇异信号

- 冲激信号

狄拉克(Dirac)定义：

$$\begin{cases} \delta(t)=0, & t\neq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1 \end{cases}$$

冲激函数与阶跃函数之间的关系：

$$\delta(t)=\frac{du(t)}{dt}$$

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau$$

1.3 基本连续信号介绍

■ **奇异信号**

- 冲激信号

性质：

- **冲激函数是偶函数**：$\delta(t)=\delta(-t)$
- **加权特性**：$f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t),\ \ f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)$
- **抽样特性**：$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt=f(0),\quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt=f(t_0)$

奇异信号

- 冲激信号

课堂练习：

$$\sin(t+\frac{\pi}{4})\delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sin(t-\frac{\pi}{4})\delta(t)dt$$

$$\int_{-3}^{0}\sin(t-\frac{\pi}{4})\delta(t-1)dt$$

$$\int_{-1}^{1}2\tau\delta(\tau-t)d\tau$$

1.3 基本连续信号介绍

- **奇异信号**
  - 冲激信号

课堂练习答案：

$$\sin(t+\frac{\pi}{4})\delta(t)=\sin(\frac{\pi}{4})\delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sin(t-\frac{\pi}{4})\delta(t)dt=\sin(-\frac{\pi}{4})$$

$$\int_{-3}^{0}\sin(t-\frac{\pi}{4})\delta(t-1)dt=\sin(1-\frac{\pi}{4})$$

$$\int_{-1}^{1}2\tau\delta(\tau-t)d\tau=2t?$$

■ 奇异信号

- 冲激信号

尺度变换：

$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$$

$$\delta(at-t_0)=\frac{1}{|a|}\delta(t-\frac{t_0}{a})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(at)dt=\frac{1}{|a|}f(0)$$

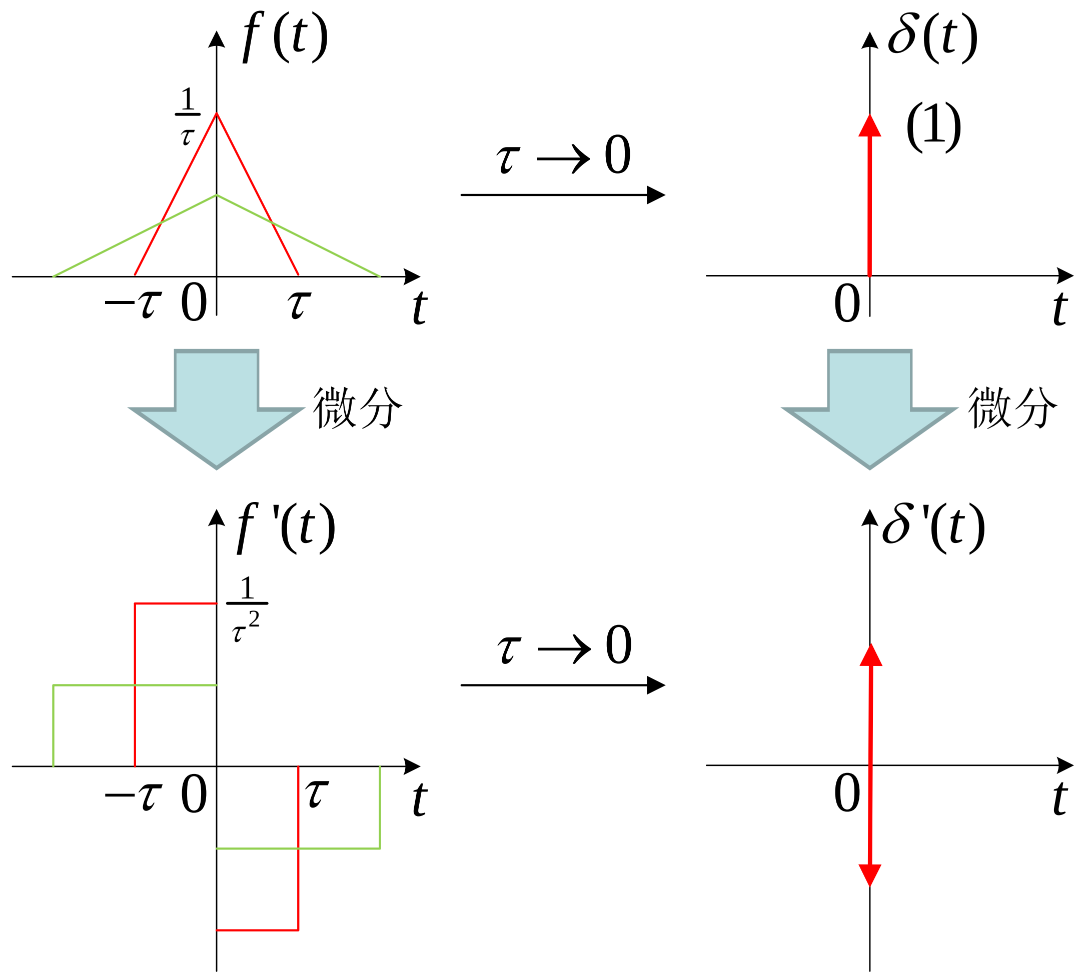
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(at-t_0)dt=\frac{1}{|a|}f(\frac{t_0}{a})$$

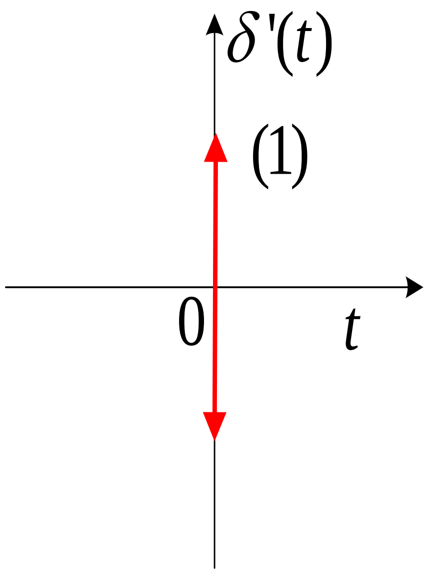
■ 奇异信号

- 冲激偶信号

定义：冲激函数的导数

$$\delta'(t)=\frac{d\delta(t)}{dt}$$





奇异信号

- 冲激偶信号

性质：

- **冲激偶函数是奇函数**：$\delta'(t) = -\delta'(-t)$

- **加权特性**：$f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t)$

$$f(t)\delta'(t-t_0) = f(t_0)\delta'(t-t_0) - f'(t_0)\delta(t-t_0)$$

- **抽样特性**：$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t)dt = -f'(0)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t-t_0)dt = -f'(t_0)$$

其他：

$$\delta'(at) = \frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{a}\delta'(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)dt = 0$$

1.3 基本连续信号介绍

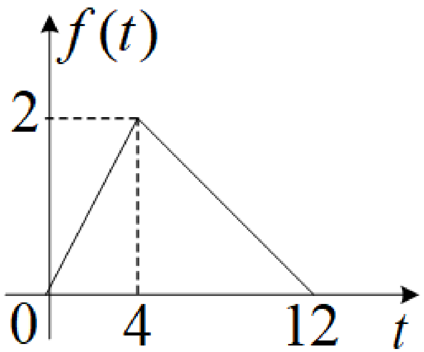
- **作业**

1. 求解 $t^3[\delta(t)+\delta(t+1)]+\int_{-\infty}^{\infty} e^{2t}[\delta(t)-\delta(t-3)]dt$ 。

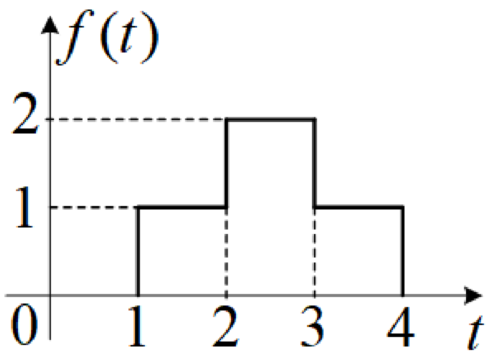
2. 求解 $\sin(t)[\delta(t)-\delta(t-\pi/2)]+\int_{-\infty}^{\infty}\cos(t)[\delta(t)-\delta(t-\pi/2)]dt$ 。

3. 已知信号 $f(t)$ 的波形如下图所示，依次利用尺度、反褶、平移画出 $f(-2t+8)$ 的波形。

4. 画出下图所示信号的**微分信号波形**。



题3



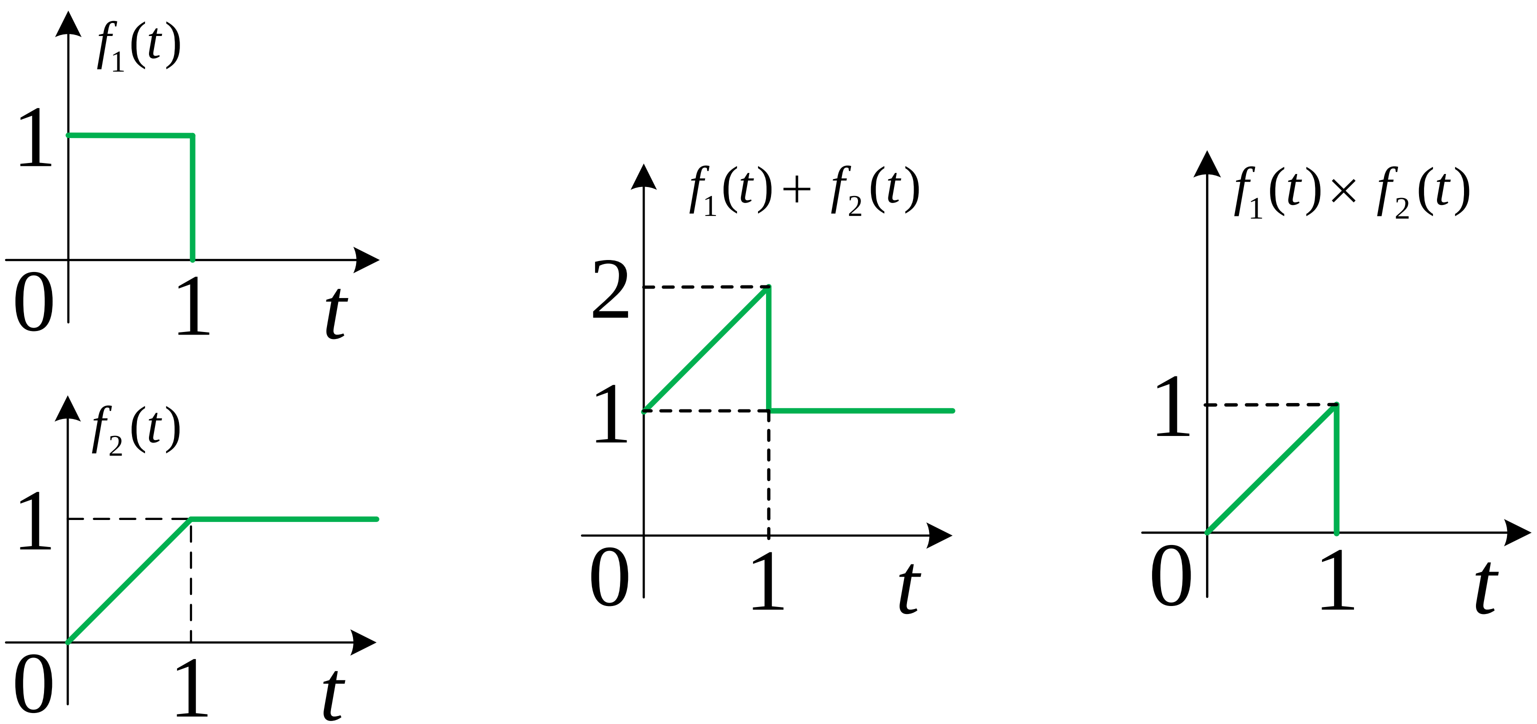
题4

1.4 信号的基本运算与分解

■ 信号的基本运算

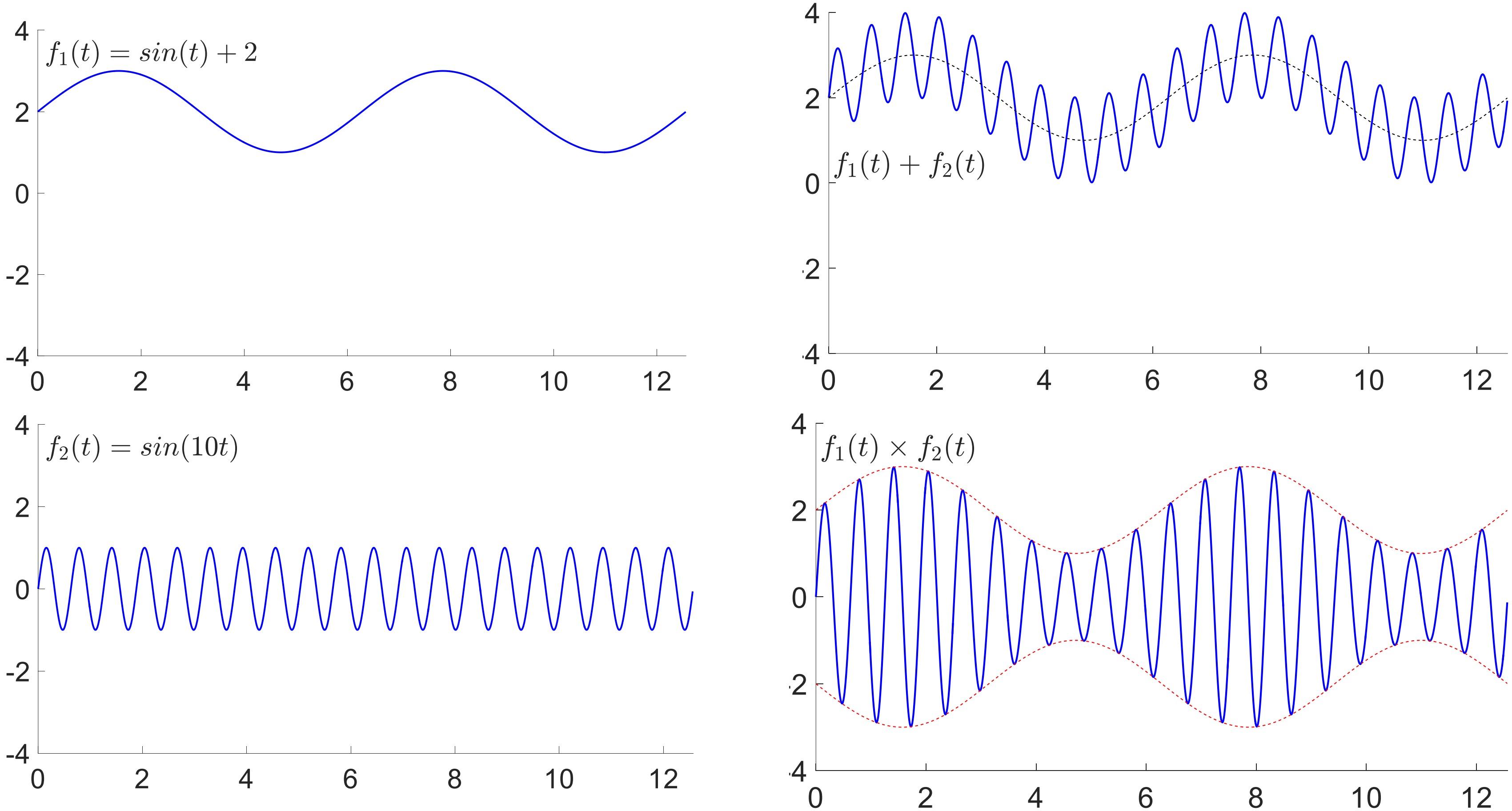
- 信号的加、乘运算

信号$f_1(\cdot)$ 和 $f_2(\cdot)$相加或相乘，是指同一时刻两信号之值对应相加或相乘。



■ 信号的基本运算

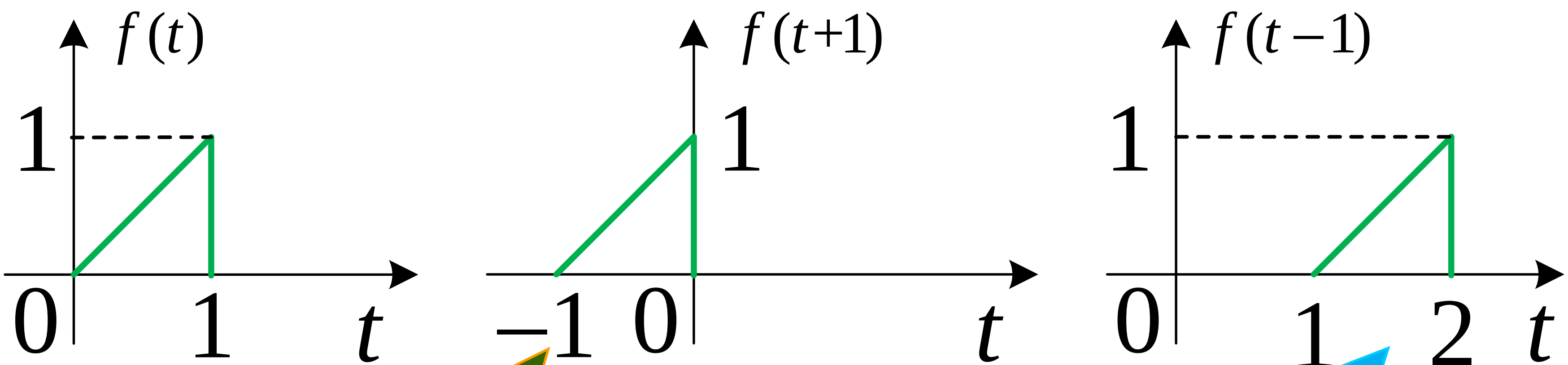
- 信号的加、乘运算



信号的基本运算

- 信号的平移

将f (t) → f (t + t0)， f (k) → f (k + k0)称为对信号f (·)的平移或移位。若t0 (或k0)< 0，则将f (·)右移；否则左移。



$f(t+t_0)$将 $f(t)$ 超前时间 t_0； 即将 $f(t)$ 的波形向左移动 t_0 。

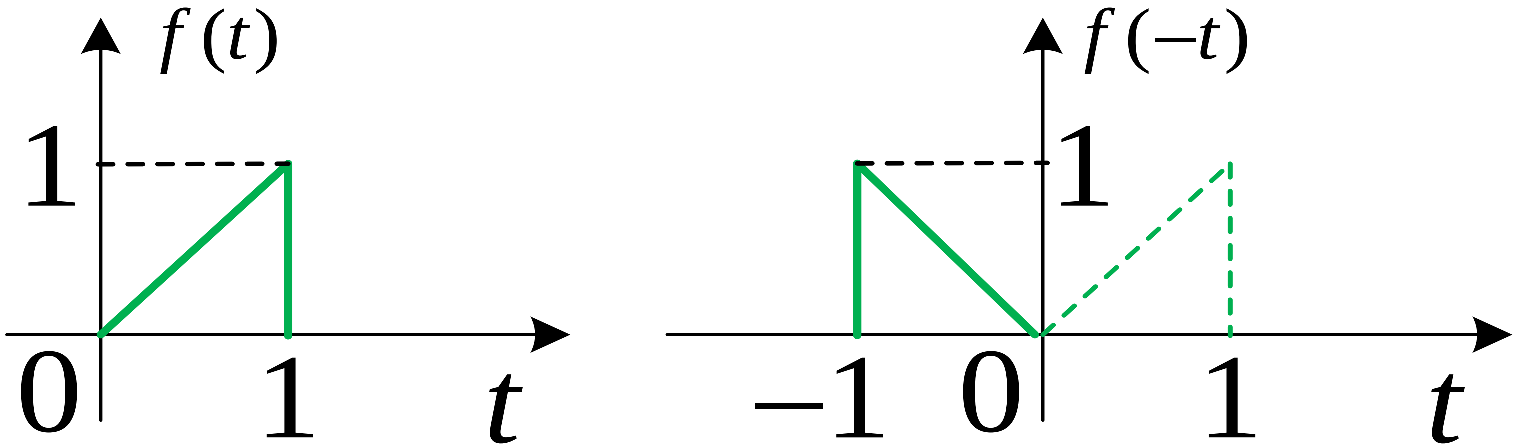
$f(t-t_0)$将 $f(t)$ 延迟时间 t_0； 即将 $f(t)$ 的波形向右移动 t_0 。

1.4 信号的基本运算与分解

■ 信号的基本运算

- 信号的反转

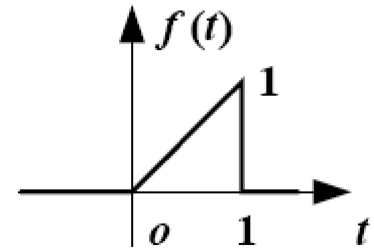
将f (t) → f (– t)， f (k) → f (– k) 称为对信号f (·)的反转或反折。从图形上看是将f (·)以**纵坐标为轴**反转180°。



1.4 信号的基本运算与分解

■ 信号的基本运算

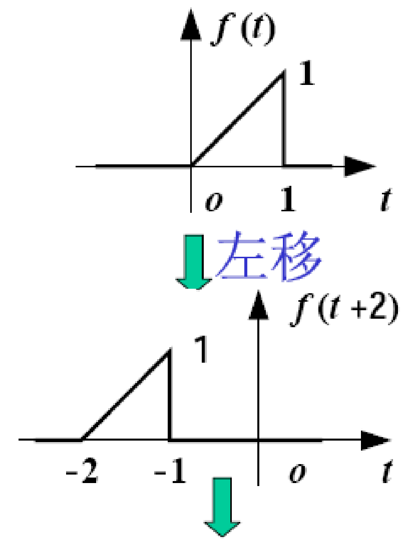
［例1. 3. 1］ 已知信号f(t)的波形如图所示，试画出f(2-t)的波形。



解：平移与反转相结合，注意：是对t 的变换！

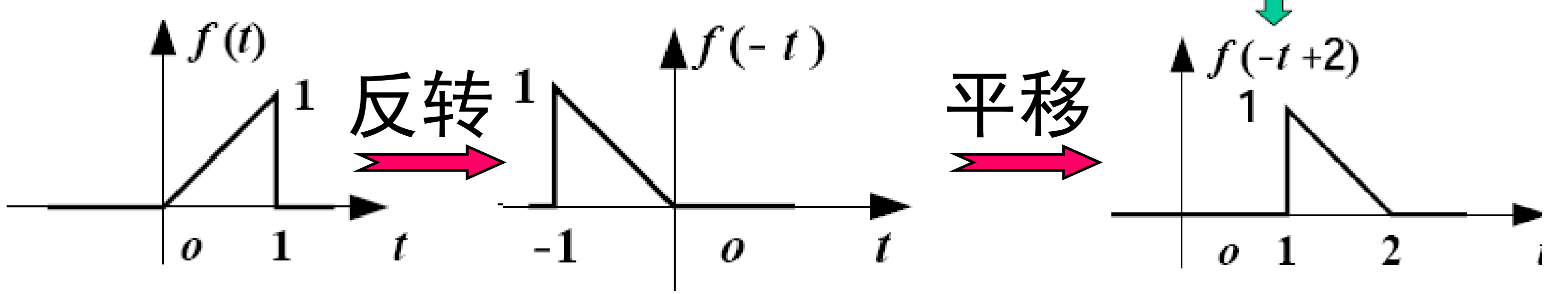
法一：①先平移f (t) → f (t +2)

②再反转f (t +2) → f (– t +2)



法二：①先反转f (t) → f (– t)

②再平移f (– t) → f (– t +2)



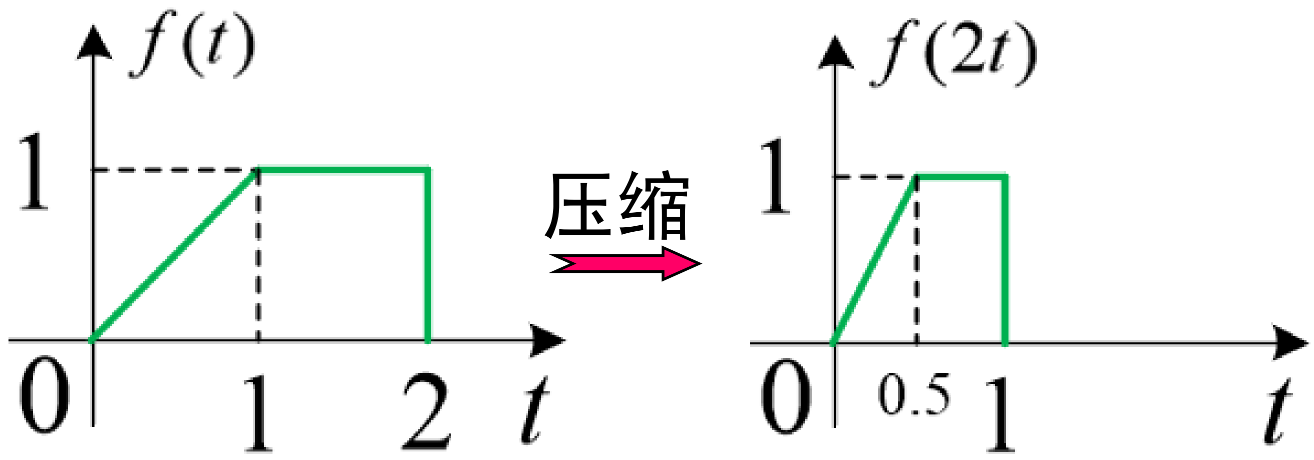
1.4 信号的基本运算与分解

■ 信号的基本运算

- 信号的尺度变换（横坐标的展缩）

将f (t) → f (a t)， 称为对信号f (t)的尺度变换。若a >1， 则波形沿横坐标压缩；若0< a < 1， 则展开。

（1）若 a > 1， 则 f (at)将 f (t)的波形沿时间轴压缩至原来的1/a



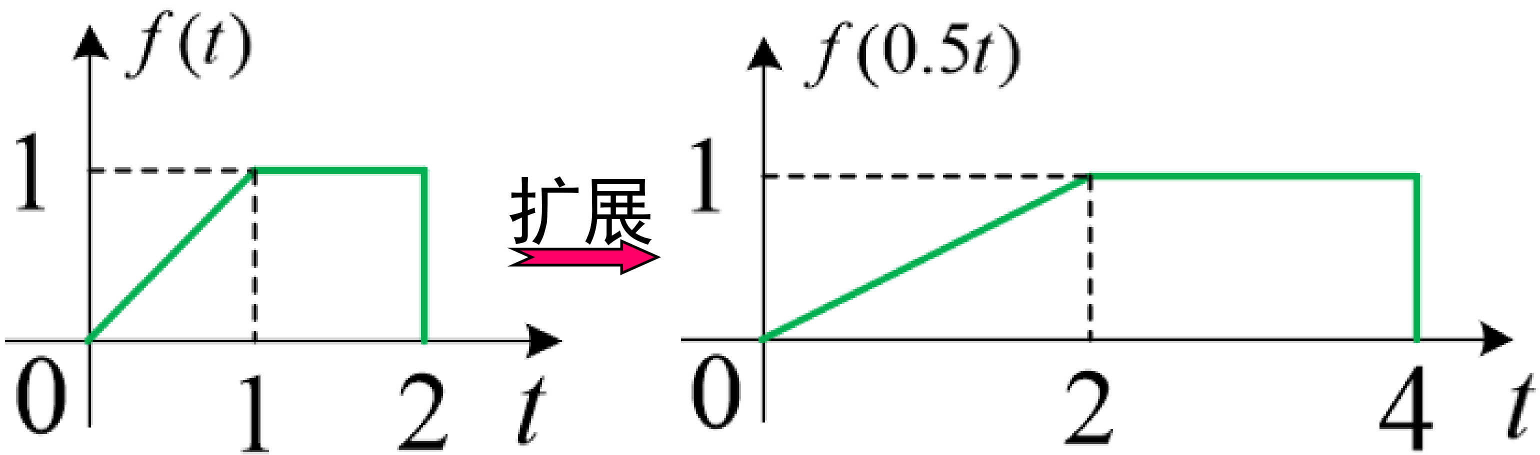
1.4 信号的基本运算与分解

信号的基本运算

- 信号的尺度变换（横坐标的展缩）

将 $f(t) \rightarrow f(at)$， 称为对信号 $f(t)$的尺度变换。若a >1， 则波形沿横坐标压缩；若0< a < 1， 则展开。

（2）若 0<a <1， 则 $f(at)$ 将 $f(t)$ 的波形沿时间轴扩展至原来的1/a

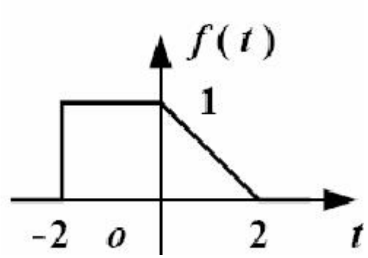


对于**离散信号**，由于$f(ak)$ 仅在为ak 为整数时才有意义， 进行尺度变换时可能会使部分信号丢失。因此一般不作波形的尺度变换。

1.4 信号的基本运算与分解

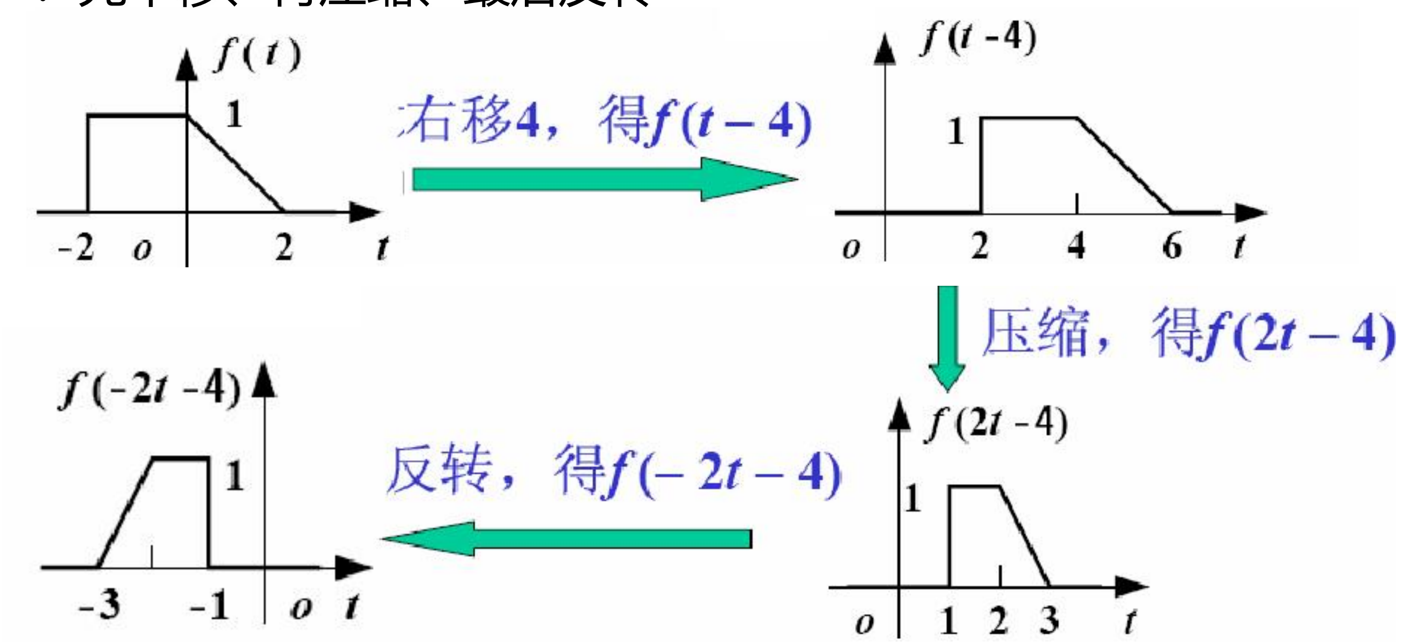
■ 信号的基本运算

[例1.3.2]（1）已知信号f(t)的波形如图所示，试画出f(-2t-4)的波形。



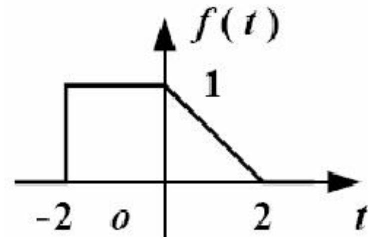
解：平移、反转、尺度变换相结合，三种运算的次序可任意。但一定要注意始终对时间t 进行

法一：先平移、再压缩、最后反转



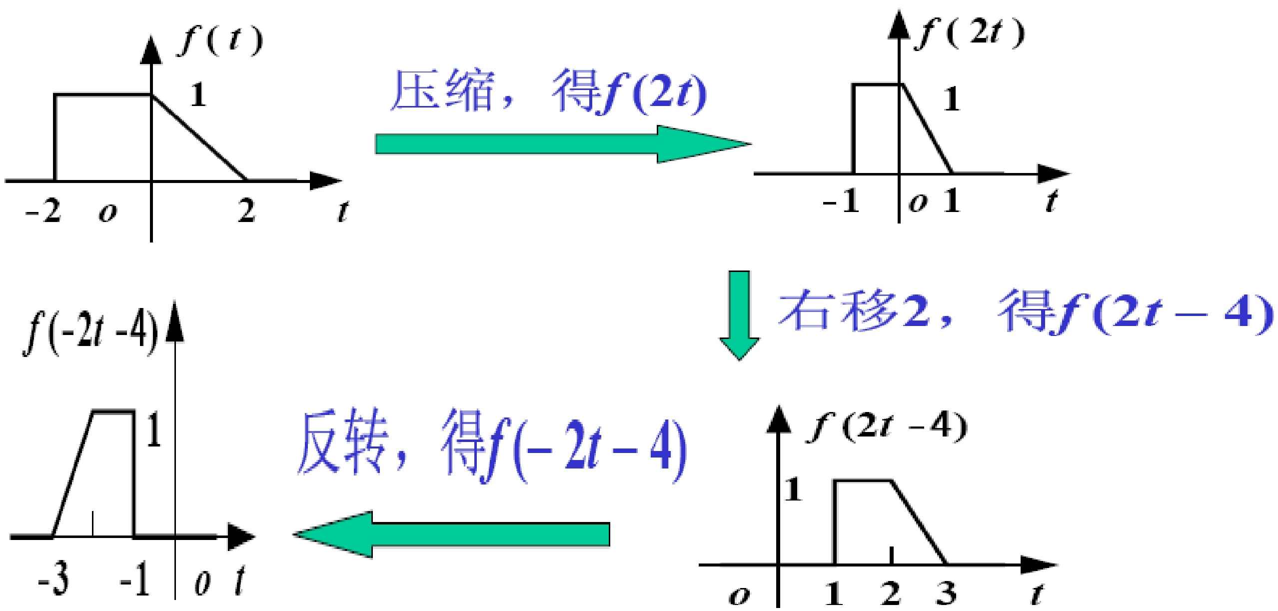
■ 信号的基本运算

[例1.3.2]（1）已知信号f(t)的波形如图所示，试画出f(-2t-4)的波形。



解：平移、反转、尺度变换相结合，三种运算的次序可任意。但一定要注意始终对时间t 进行

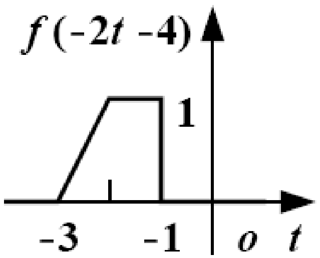
法二：先压缩、再平移、最后反转



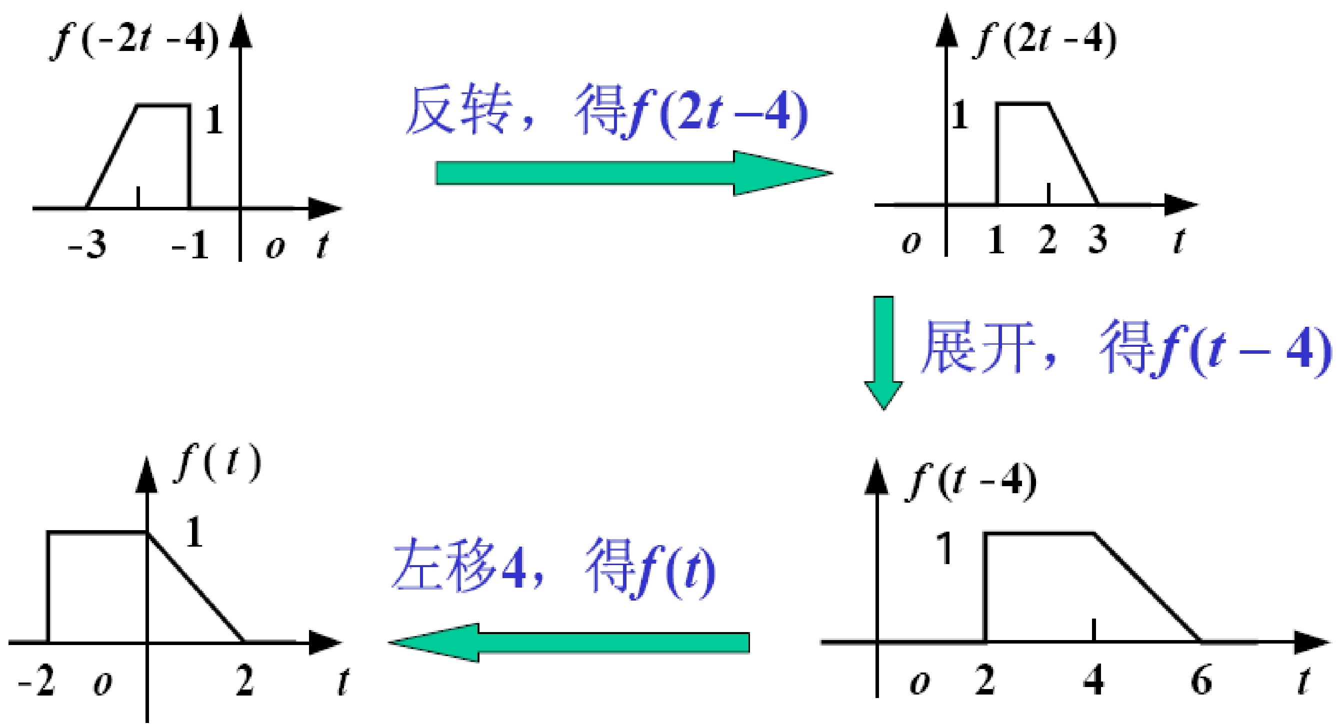
1.4 信号的基本运算与分解

■ 信号的基本运算

[例1.3.2]（2）若已知f(－4－2t)，画出f(t)。



解：可以先反转，再展开，最后平移



1.4 信号的基本运算与分解

信号的基本运算

f(t)->f(at+b)=f[a(t+b/a)] 设 a>0

先展缩：a>1,压缩a倍；a<1,扩展1/a倍

后平移：左移b/a个单位

加上倒置：f(-at+b)=f[-a(t-b/a)]

宗量相同，函数值相同，求新坐标。

$f(t)$	$f(at+b)$
t0 -> f(t0)	at+b=t0 => t=(t0-b)/a -> f(t0)
t1 -> f(t1)	at+b=t1 => t=(t1-b)/a -> f(t1)

1.4 信号的基本运算与分解

信号的基本运算

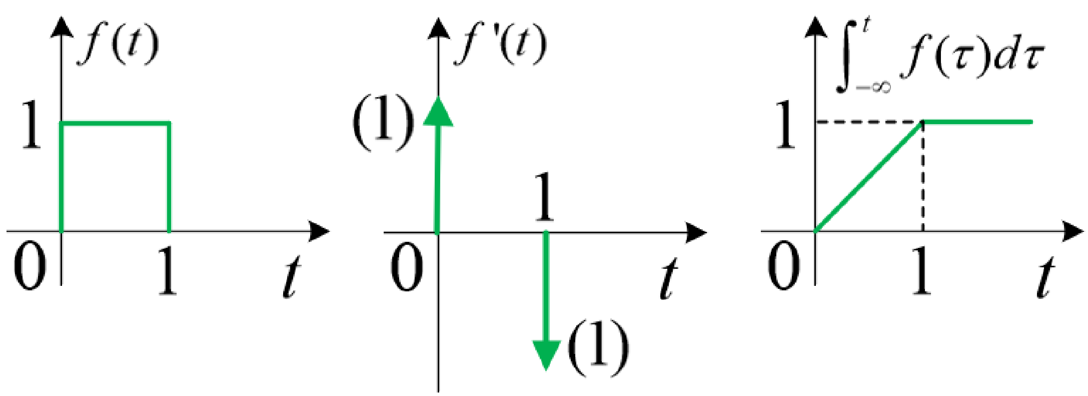
- 信号的微分和积分

- **微分**：信号f(t)的微分运算指f(t)对t取导数，即

$$f'(t)=\frac{d}{dt}f(t)$$

- **积分**：积分：信号f(t)的积分运算指f(t)在（-∞，t）区间内的定积分，即

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$$



1.4 信号的基本运算与分解

■ 信号的基本运算

- 信号的微分和积分

结论：

（1）信号经过微分运算后突出显示了它的变化部分，起到了锐化的作用；

（2）信号经过积分运算后，使得信号突出变化部分变得平滑了，起到了模糊的作用；利用积分可以削弱信号中噪声的影响。

1.4 信号的基本运算与分解

■ 信号的分解

信号从不同角度分解：

- 直流分量与交流分量
- 偶分量与奇分量
- 脉冲分量
- 实部分量与虚部分量
- 正交函数分量
- 利用分形理论描述信号

1.4 信号的基本运算与分解

信号的分解

- 直流分量与交流分量

信号f(t)分解为直流分量f_D与交流分量$f_A(t)$: $f(t) \rightarrow f_D + f_A(t)$

其中，f_D为直流分量即信号的平均值；

$f_A(t)$为交流分量

1.4 信号的基本运算与分解

■ 信号的分解

- 奇分量与偶分量

$$f(t)\xrightarrow{\text{分解为}} f_e(t)+f_o(t)$$

其中，偶分量 $f_e(t)=\dfrac{1}{2}[f(t)+f(-t)]$

奇分量 $f_o(t)=\dfrac{1}{2}[f(t)-f(-t)]$

满足 $f_e(t)=f_e(-t),\ f_o(t)=-f_o(-t)$

1.4 信号的基本运算与分解

■ 信号的分解

- 实部分量与虚部分量

$$f(t) \xrightarrow{\text{分解为}} f_r(t) + jf_i(t)$$

其实部为： $$f_r(t) = \frac{1}{2}[f(t) + f^*(t)]$$

其虚部为： $$jf_i(t) = \frac{1}{2}[f(t) - f^*(t)]$$

其复数信号的模为： $$|f(t)|^2 = f(t)f^*(t) = f_r^2(t) + f_i^2(t)$$

■ 系统的分类与性质

1. 连续系统与离散系统

输入和输出均为连续时间信号的系统称为连续时间系统。

输入和输出均为离散时间信号的系统称为离散时间系统。

连续时间系统的数学模型是用微分方程来描述，而离散时间系统的数学模型是用差分方程来描述。

2. 动态系统与即时系统

若系统在任一时刻的响应不仅与该时刻的激励有关，而且与它过去的历史状况有关，则称为动态系统或记忆系统。

含有记忆元件(电容、电感等)的系统是动态系统；否则称即时系统或无记忆系统。

■ 系统的分类与性质

3. 线性系统与非线性系统

能同时满足齐次性与叠加性的系统称为线性系统。满足叠加性是线性系统的必要条件。

不能同时满足齐次性与叠加性的系统称为非线性系统。

1.5 系统的数学描述与分类

■ 系统的分类与性质

3. 线性系统与非线性系统

系统的激励 $f(\cdot)$ 所引起的响应 $y(\cdot)$ 可简记为 $y(\cdot) = \mathrm{T}[f(\cdot)]$。

线性性质包括两方面：齐次性和可加性。

若系统的激励$f(\cdot)$增大a倍时，其响应$y(\cdot)$也增大a倍，即

$$\mathrm{T}[af(\cdot)] = a\,\mathrm{T}[f(\cdot)]$$

则称该系统是齐次的。

若系统对于激励$f_1(\cdot)$与$f_2(\cdot)$之和的响应等于各个激励所引起的响应之和，即 $\mathrm{T}[f_1(\cdot)+f_2(\cdot)] = \mathrm{T}[f_1(\cdot)]+\mathrm{T}[f_2(\cdot)]$，则称该系统是可加的。

若系统既是齐次的又是可加的，则称该系统是线性的，

即 $\mathrm{T}[a f_1(\cdot) + bf_2(\cdot)] = a\,\mathrm{T}[f_1(\cdot)] + b\mathrm{T}[f_2(\cdot)]$

1.5 系统的数学描述与分类

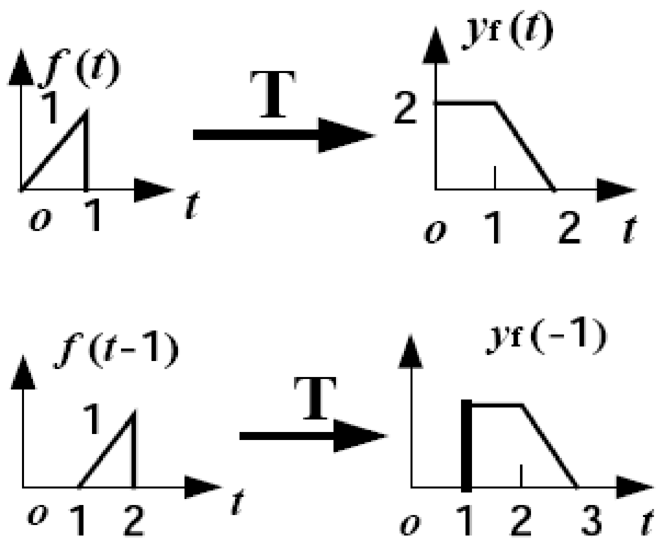
■ 系统的分类与性质

4. 时不变系统与时变系统　　满足时不变性质的系统称为时不变系统。

时不变性质:

若系统满足输入延迟多少时间，其激励引起的响应也延迟多少时间，

即若 T[{0}，f(t)] = y(t)， ⟶ T[{0}，f(t - td)] = y(t - td)。



直观判断方法：

若$f(\cdot)$前出现时变系数，或有反转、尺度（展缩）变换，则系统为时变系统。

1.5 系统的数学描述与分类

■ 系统的分类与性质

5、 因果系统与非因果系统

激励引起的响应不会出现在激励之前的系统，称为因果系统

即对因果系统，当t < t0， f(t) = 0时，有t < t0， y(t) = 0。

如：下列系统均为因果系统：y(t) = 3f(t – 1)

而下列系统为非因果系统：

(1) y(t) = 2f(t + 1)， 因为，令 t=1 时，有 y(1) = 2f(2)

(2) y(t) = f(2t)，因为，令 t=1 时，有 y(1) = 2f(2) 。

也就是说，如果响应$r(t)$并不依赖于将来的激励，那么系统就是因果的。

系统的分类与性质

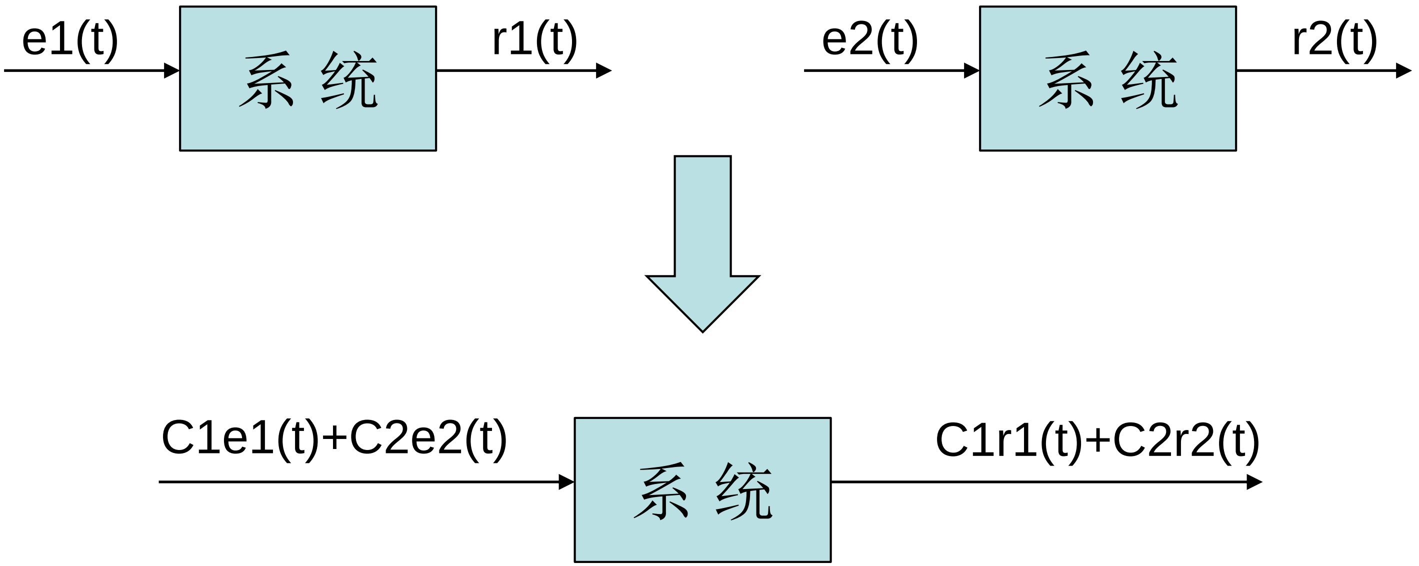
6. 稳定系统与不稳定系统

一个系统，若对有界的激励f(.)所产生的响应y(.)也是有界时，则称该系统为有界输入有界输出稳定，简称稳定。

即若 $|f(.)|<\infty$，其 $|y(.)|<\infty$ 则称系统是稳定的，BIBO。

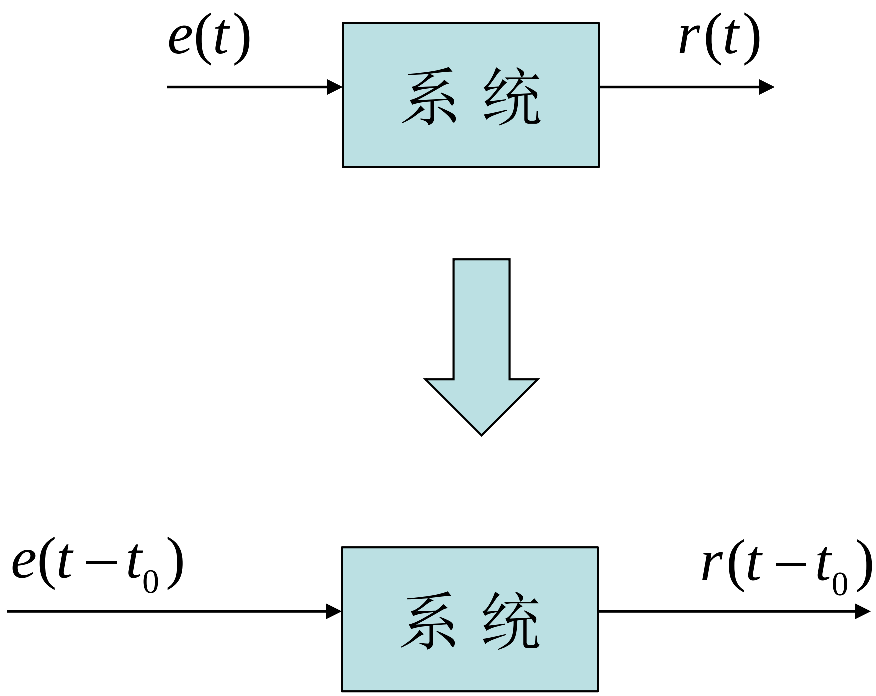
1.6 线性时不变系统

- **线性（叠加性与均匀性）**



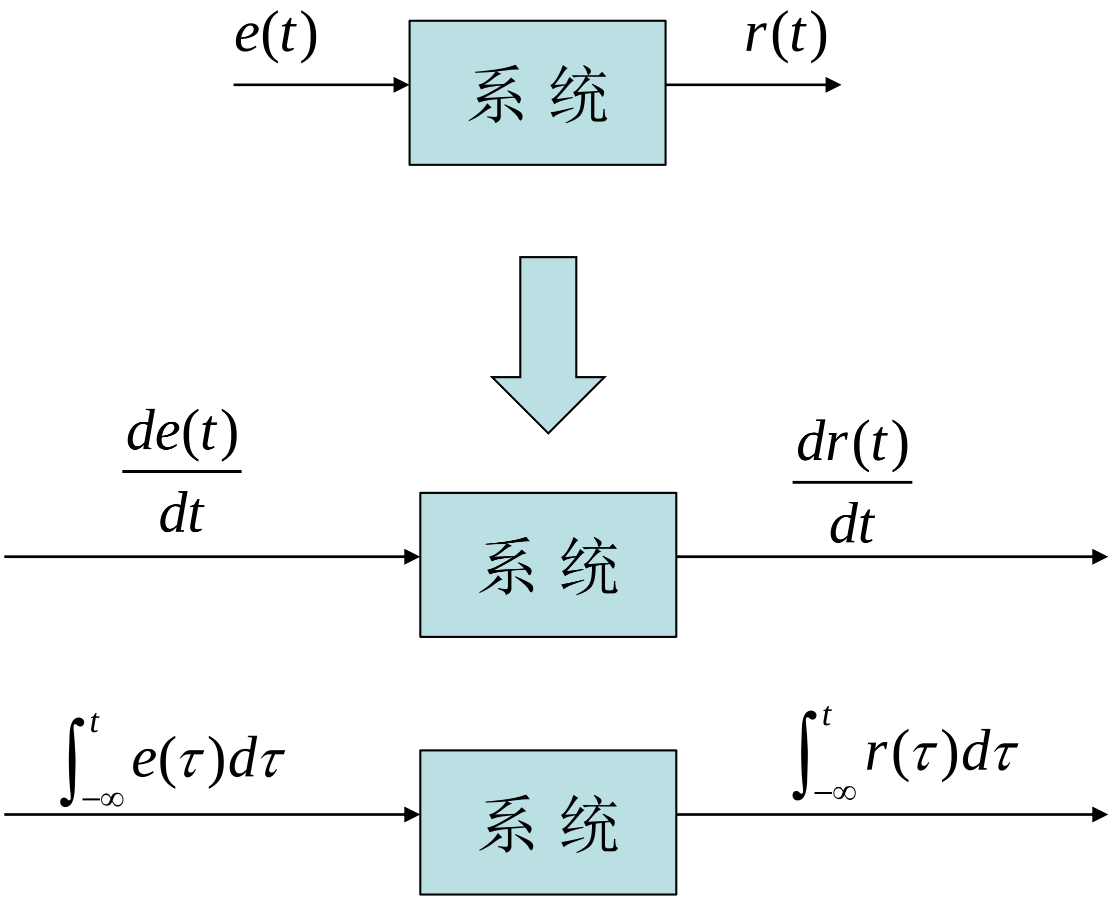
1.6 线性时不变系统

- 时不变特性



1.6 线性时不变系统

- 微分特性



■ 因果性

系统在 t_0 时刻的响应只与 $t = t_0$ 和 $t < t_0$ 时刻的输入有关。

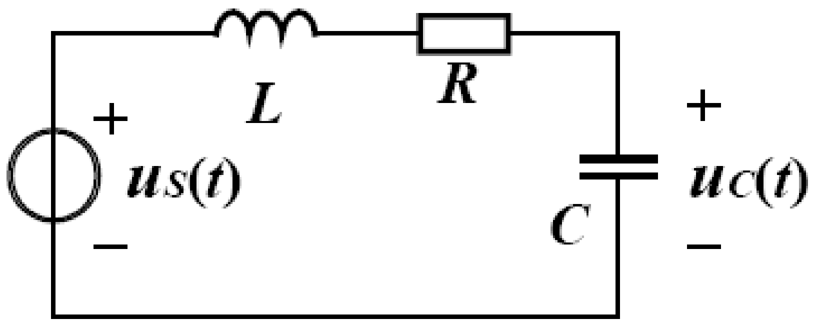
1.5 系统的数学描述与分类

■ 系统的解析描述

描述连续动态系统的数学模型是微分方程，

描述离散动态系统的数学模型是差分方程。

图示RLC电路，以uS(t)作激励，以uC(t)作为响应，由 KVL和 VAR列方程，并整理得二阶常系数线性微分方程。

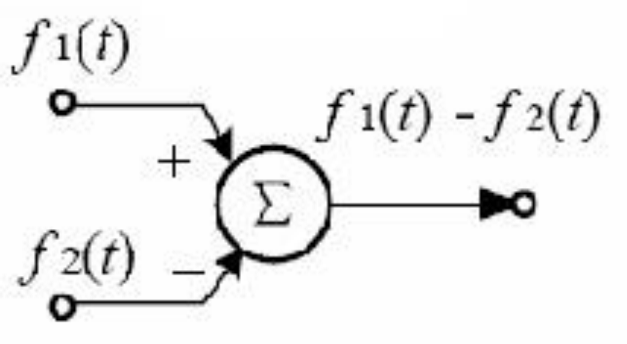


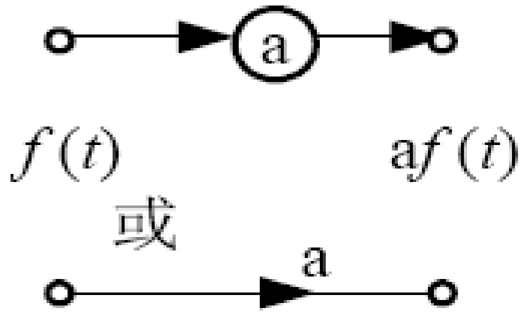
$$\begin{cases} LC\dfrac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = u_S \\ u_C(0+),\ u_C'(0_+) \end{cases}$$

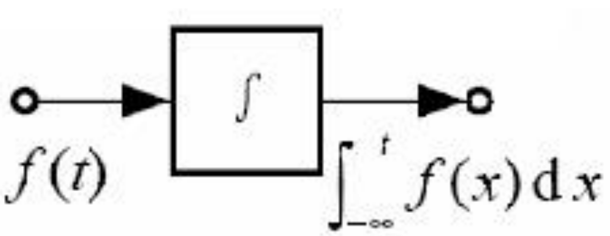
1.5 系统的数学描述与分类

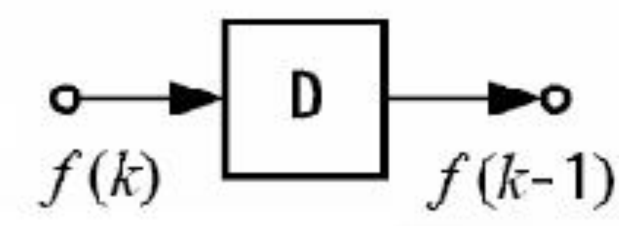
■ 系统的框图描述

将加、乘、微分等基本运算用一些理想部件符号表示出来并相互联接以表征上述方程的运算关系，这样画出的图称为模拟框图，简称框图。





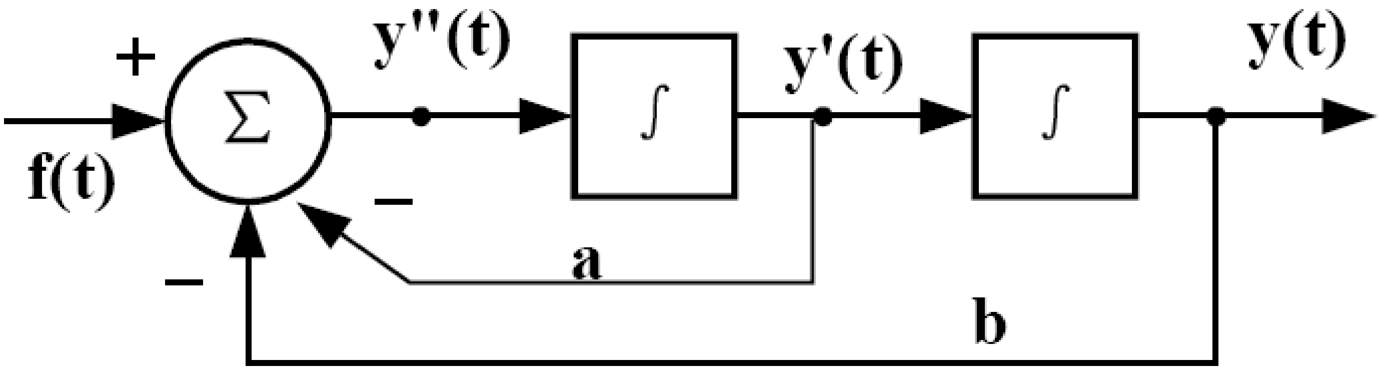




- 系统的框图描述

例：已知$y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t)$，画框图。

解：将方程写为$y''(t) = f(t) - ay'(t) - by(t)$



1.5 系统的数学描述与分类

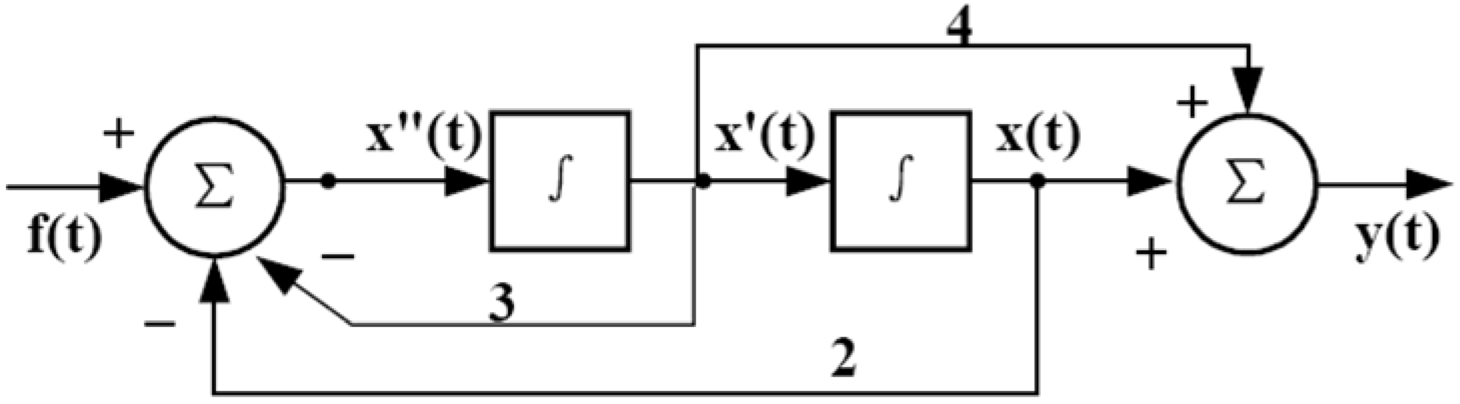
系统的框图描述

例：已知$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 4f'(t) + f(t)$，画框图。

解： 该方程含f(t)的导数，可引入辅助函数画出框图。

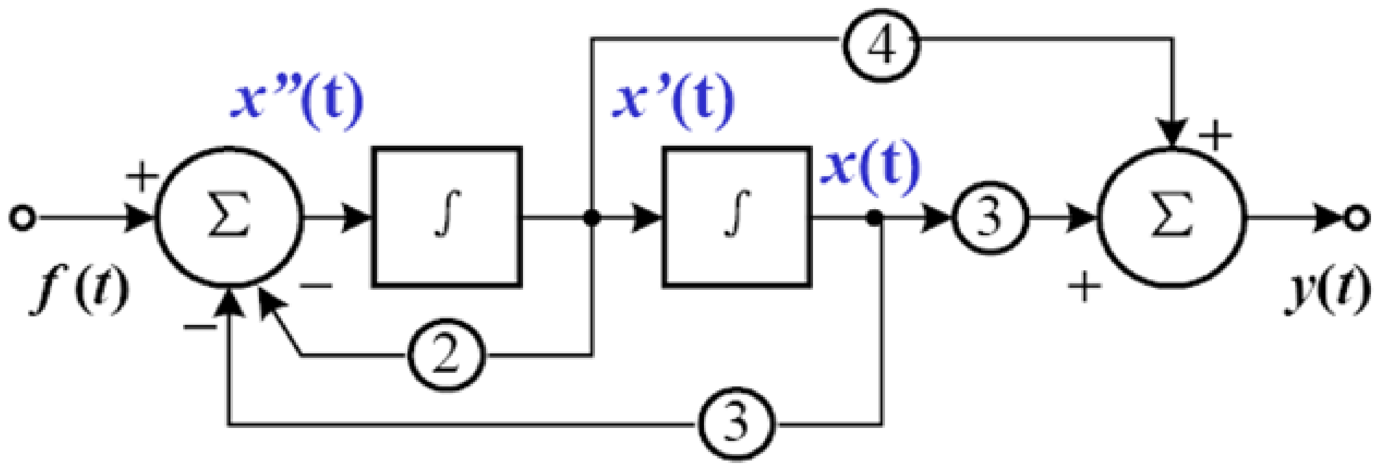
设辅助函数x(t)满足$x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = f(t)$， 可推导出：

$y(t) = 4x'(t) + x(t)$，它满足原方程。



■ 系统的框图描述

例：已知框图，写出系统的微分方程。



解：设辅助变量 x(t) 如图，$x''(t) = f(t) – 2x'(t) –3x(t)$,

即 $x''(t) + 2x'(t) + 3x(t) = f(t)$， $y(t) = 4x'(t)+ 3x(t)$

根据前面，逆过程，得

$$y''(t) + 2y'(t) + 3y(t) = 4f'(t)+ 3f(t)$$

1.5 系统的数学描述与分类

■ 系统的框图描述

差分方程

例：某人每月初在银行存入一定数量的款，月息为β元/元，求第k个月初存折上的款数。

设第k个月初的款数为$y(k)$,这个月初的存款为$f(k)$,上个月初的款数为$y(k-1)$，利息为$\beta y(k-1)$，则 $y(k)=y(k-1)+\beta y(k-1)+f(k)$

即 $$y(k)-(1+\beta)y(k-1) = f(k)$$

若设开始存款月为$k=0$，则有$y(0)= f(0)$。

上述方程就称为$y(k)$与$f(k)$之间所满足的差分方程。所谓差分方程是指由未知输出序列项与输入序列项构成的方程。未知序列项变量最高序号与最低序号的差数，称为差分方程的阶数。上述为一阶差分方程。

1.5 系统的数学描述与分类

■ 系统的框图描述

由n阶差分方程描述的系统称为n阶系统。

描述LTI系统的是线性常系数差分方程。

例：下列差分方程描述的系统，是否线性？是否时不变？并写出方程的阶数。

（1） $y(k) + (k-1)y(k-1) = f(k)$　　线性、时变，一阶

（2） $y(k) + y(k+1)\,y(k-1) = f^2(k)$　　非线性、时不变，二阶

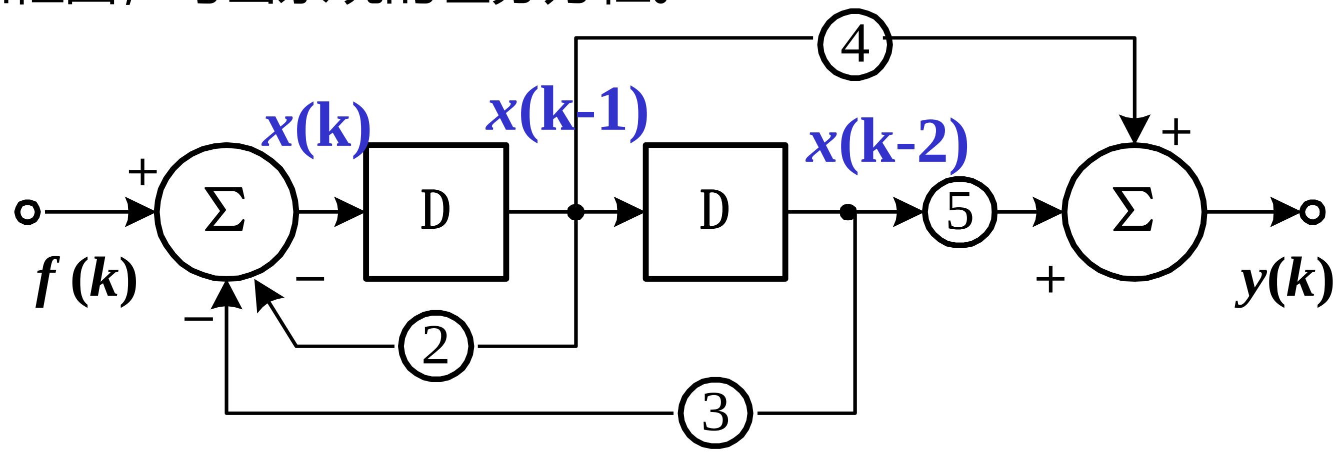
（3） $y(k) + 2\,y(k-1) = f(1-k) + 1$　　非线性、时变，一阶

判断方法：方程中均为输出、输入序列的一次关系项，则是线性的。

输入输出序列前的系数为常数，且无反转、展缩变换，则为时不变的。

■ 系统的框图描述

例：已知框图，写出系统的差分方程。



解：设辅助变量$x(k)$如图 $x(k) = f(k) - 2x(k-1) - 3x(k-2)$

即 $x(k) + 2x(k-1) + 3x(k-2) = f(k)$

$y(k) = 4x(k-1) + 5x(k-2)$

消去$x(k)$，得

$$y(k) + 2y(k-1) + 3y(k-2) = 4f(k-1) + 5f(k-2)$$