南京信息工程大学

2022 一 2023 学年 第 1 学期 信息论基础 A卷

参考答案及评分标准

1．设有一个信源 X，它产生 0，1 序列的信息。它在任意时刻不论以前发生过什么符号，均按 P(0) = 0.2，P(1) = 0.8 的概率发出符号。(15%)

(1) 试计算 $H(X^2)$，$H(X_3|X_1X_2)$及 H_∞（X_n 表示 n 时刻信源发出的符号信息)；

(2) 试计算 $H(X^4)$并写出 X^4 信源中可能有的所有符号。

解答：首先，这个信源是平稳无记忆信源。因为题目说明了：“**它在任意时间而且不论以前发生过什么符号**”，

因此，有 $H(X^n)=nH(X)$， $H(X_3|X_1X_2)=H(X_3)$。

（1）
$$H(X^2)=2H(X)=-2\times(0.2\log_2 0.2+0.8\log_2 0.8)$$
$$=2\times 0.722=1.444\ bit/符号$$

$$H(X_3|X_1X_2)=H(X_3)$$
$$=-\sum_i p(x_i)\log_2 p(x_i)=-(0.2\log_2 0.2+0.8\log_2 0.8)$$
$$=0.722\ \ bit/符号$$

$$H_\infty=\lim_{N->\infty}H(X_N|X_1X_2...X_{N-1})=H(X_N)=\tfrac{1}{N}H(X^N)=H(X)=0.722\ \ bit/符号$$

(2)
$$H(X^4)=4H(X)=-4\times(0.2\log_2 0.2+0.8\log_2 0.8)$$
$$=2.888\ \ bit/符号$$

X^4的所有符号

0000	0001	0010	0011
0100	0101	0110	0111
1000	1001	1010	1011
1100	1101	1110	1111

<u>评分标准</u>：该题为基本题，考查学生对平稳信源、扩展信源信息熵、条件熵和极限熵概念的掌握情况。求出第一问得 9 分，第二问得 6 分。

2. 有两个二元随机变量 X 和 Y，它们的联合概率为

Y \ X	x_1=0	x_2=1
y_1=0	1/8	3/8
y_2=1	3/8	1/8

并定义另一随机变量 Z = XY（一般乘积），试计算：（15%）

(1) H(X)，H(Y)，H(Z)和 H(XZ)；

(2) H(X|Y)，H(Y|X)，H(X|Z)和 H(Z|X)；

(3) I(X;Y)和 I(X;Z)。

解答：（1）第 1 问，求 H(X)，H(Y)，H(Z)和 H(XZ)

$$p(x_1)=p(x_1y_1)+p(x_1y_2)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{1}{2}$$

$$p(x_2)=p(x_2y_1)+p(x_2y_2)=\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$

$$H(X)=-\sum_i p(x_i)\log_2 p(x_i)=1\ bit/\text{符号}$$

$$p(y_1)=p(x_1y_1)+p(x_2y_1)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{1}{2}$$

$$p(y_2)=p(x_1y_2)+p(x_2y_2)=\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$

$$H(Y)=-\sum_j p(y_j)\log_2 p(y_j)=1\ bit/\text{符号}$$

$Z=XY$ 的概率分布如下：

$$\begin{bmatrix} Z \\ P(Z) \end{bmatrix}=\begin{Bmatrix} z_1=0 & z_2=1 \\ \frac{7}{8} & \frac{1}{8} \end{Bmatrix}$$

$$H(Z)=-\sum_k^2 p(z_k)=-\left(\frac{7}{8}\log_2\frac{7}{8}+\frac{1}{8}\log_2\frac{1}{8}\right)=0.544\ bit/\text{符号}$$

$$p(x_1)=p(x_1z_1)+p(x_1z_2)$$

$$p(x_1z_2)=0(x_1=0\text{，}z_2=1\text{情况不可能出现})$$

$$p(x_1z_1)=p(x_1)=0.5$$

$$p(z_1)=p(x_1z_1)+p(x_2z_1)$$

$$p(x_2z_1)=p(z_1)-p(x_1z_1)=\frac{7}{8}-0.5=\frac{3}{8}$$

$$p(z_2)=p(x_1z_2)+p(x_2z_2)$$

$$p(x_2z_2)=p(z_2)=\frac{1}{8}$$

$$H(XZ)=-\sum_i\sum_k p(x_iz_k)\log_2 p(x_iz_k)=-\left(\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\log_2\frac{3}{8}+\frac{1}{8}\log_2\frac{1}{8}\right)=1.406\ bit/\text{符号}$$

（2）求 H(X|Y)，H(Y|X)，H(X|Z)和 H(Z|X)

$$H(XY)=-\sum_i\sum_j p(x_iy_j)\log_2 p(x_iy_j)==-\left(\frac{1}{8}\log_2\frac{1}{8}+\frac{3}{8}\log_2\frac{3}{8}+\frac{3}{8}\log_2\frac{3}{8}+\frac{1}{8}\log_2\frac{1}{8}\right)=1.811\ bit/\text{符号}$$

$$H(X|Y)=H(XY)-H(Y)=1.811-1=0.811\ bit/\text{符号}$$

$$H(Y|X)=H(XY)-H(X)=1.811-1=0.811\ bit/\text{符号}$$

$$H(X|Z)=H(XZ)-H(Z)=1.406-0.544=0.862\ bit/\text{符号}$$

$$H(Z|X)=H(XZ)-H(X)=1.406-1=0.406\ bit/\text{符号}$$

（3）求 I(X;Y)和 I(X;Z)

$I(X;Y)=H(X)-H(X|Y)=1-0.811=0.189\ \ bit/符号$
$I(X;Z)=H(X)-H(X|Z)=1-0.862=0.138\ \ bit/符号$

评分标准：该题为基本题，考察学生对信源信息熵、条件熵、后验熵、平均互信息等概念的理解和掌握情况。第（1）问的解答占 5 分，第（2）问占 6 分，最后一问占 4 分。

3．已知信源发出 a_1 和 a_2 两种消息，且 $p(a_1)=p(a_2)=1/2$。此消息在二进制对称信道上传输，信道传输特性为 $p(b_1|a_1)= p(b_2|a_2)=1-\varepsilon$，$p(b_1|a_2)= p(b_2|a_1)=\varepsilon$。求互信息量 $I(a_1;b_1)$和 $I(a_1;b_2)$ (10%)

解答： 先求出 $p(b_1)$和 $p(b_2)$的概率，其求法为：

$$p(b_i)=p(a_1b_i)+p(a_2b_i)=p(a_1)p(b_i|a_1)+p(a_2)p(b_i|a_2)$$

可得 $p(b_1)=\frac{1}{2}(1-\varepsilon)+\frac{1}{2}\varepsilon=\frac{1}{2}$， $p(b_2)=\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}(1-\varepsilon)=\frac{1}{2}$。

互信息量 $I(a_i;b_j)$代表收到消息 b_j 后获得的关于事件 a_i 的信息量，其定义为：

$$I(\mathrm{a}_i;\mathrm{b}_j)=\log\frac{p(\mathrm{a}_i|\mathrm{b}_j)}{p(\mathrm{a}_j)}=\log\frac{p(\mathrm{b}_j|\mathrm{a}_i)}{p(\mathrm{b}_i)}$$

因此， $I(\mathrm{a}_1;\mathrm{b}_1)=\log_2\frac{p(b_1|a_1)}{p(b_1)}=\log_2\frac{1-\varepsilon}{1/2}=\log_2(2(1-\varepsilon))=1+\log_2(1-\varepsilon)$

$$I(\mathrm{a}_1;\mathrm{b}_2)=\log_2\frac{p(\mathrm{b}_2|\mathrm{a}_1)}{p(\mathrm{b}_2)}=\log_2\frac{\varepsilon}{1/2}=\log_2(2\varepsilon)=1+\log_2\varepsilon$$

评分标准：该题为基本题，考查学生对互信息量、信道转移概率等概念的掌握情况。算得两个互信息量 $I(a_1;b_1)$和 $I(a_1;b_2)$各得 5 分；每问公式写对，计算结果有误扣 1 分。

4. 一个快餐店只提供汉堡包和牛排，当顾客进店以后只需向厨房喊一声 B 或 D 就表示他点的是汉堡包或牛排。通常厨师听错的概率是 20%，据统计顾客 40%会点汉堡包，60%会点牛排。问：
（1）信道传递矩阵 P 和信道容量 C；
（2）每次顾客点菜时提供多少信息量；
（3）这个信道可不可能正确传递顾客的信息。（15%）

解答：
（1）据题意，顾客喊 B 或 D，为事件 X；厨师确定给汉堡包和牛排为事件 Y，这样，p(Y|X)构成一个二元对称信道，其传递矩阵为 $P=\begin{bmatrix}0.8 & 0.2\\0.2 & 0.8\end{bmatrix}$。

根据二元对称信道容量的计算公式可得，

$$C = \log_2 2 - H(p, 1-p) = 1 - (-0.2\log_2 0.2 - (1-0.2)\log_2(1-0.2)) = 1 - 0.7219 = 0.2781$$

（2）每次顾客点菜提供的信息为 X 的熵，即

$$H(X) = H(0.6, 0.4) = -0.6\log_2 0.6 - 0.4\log_2 0.4 = 0.971$$

(3) $H(X) > C$，这个信道不能正确传递顾客的信息。

评分标准：该题为基本题，考查学生对信道建模、信道容量等概念的掌握情况。每小题各 5 分；公式写对，计算结果有误扣 1 分。

5. 离散无记忆信源 $P(a_1)=1/8$；$P(a_2)= 1/16$；$P(a_3)= 1/2$；$P(a_4)=3/16$；$P(a_5)=1/8$；

(1) 计算对信源的每个符号进行二元定长编码的码长及编码效率；

(2) 对信源进行二进制 Huffman 编码，画出霍夫曼码树（概率小的分支在左，赋码 1；概率大的分支在右，赋码 0)，计算平均码长和编码效率。

对于(2)问，要求写出编码过程。（15%）

解答：

(1)对信源的符号逐个进行二元定长编码，码长为 3（+1 分)，信源信息熵为（+2 分)：

$$H(X) = -\frac{1}{8}\log_2\frac{1}{8} - \frac{1}{16}\log_2\frac{1}{16} - \frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} - \frac{3}{16}\log_2\frac{3}{16} - \frac{1}{8}\log_2\frac{1}{8} = 1.9528 \text{ 比特/符号}$$

编码效率 $\eta_{定} = \frac{1.9528}{3} = 65.09\%$（+2 分）

(2) 对信源编 Huffman 码

1）将信源符号按概率从大到小排列， $p(a_3) > p(a_4) > p(a_1) > p(a_5) > p(a_2)$

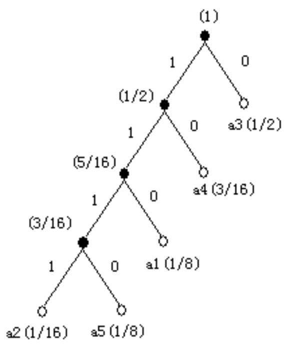
2）取两个概率最小的符号进行合并，将合并结点加入原符号序列进行排序

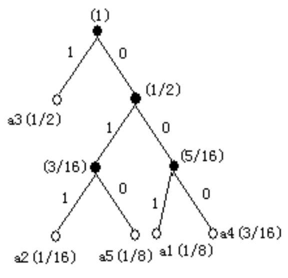
3）重复步骤 2），直到不能合并为止，构造出 Huffman 树

4）分配码字，遍历 Huffman 树，进行编码。

Huffman 树如图所示：

（有两种树结构，但平均码长和编码效率是一样的）





编码结果为：

a_1->110	或者	a_1->001
a_2->1111		a_2->011
a_3->0		a_3->1
a_4->10		a_4->000

a_5->1110　　　　　　　a_5->010　　　　　**（+3 分）**

平均码长 $R = 3\times\frac{1}{8} + 4\times\frac{1}{16} + 1\times\frac{1}{2} + 2\times\frac{3}{16} + 4\times\frac{1}{8} = 2$ **（+1 分）**，$\eta_H = \frac{1.9528}{2} = 97.64\%$ **（+1 分）**

评分标准：该题为基本题，考查学生对定长编码与 Huffman 编码的掌握情况。求出定长编码码长及信息熵、编码效率得 5 分，求出正确的 Huffman 编码得 8 分（画出 Huffman 编码树得 5 分，编码得 3 分），正确计算 Huffman 编码的平均码长、编码效率各给 1 分。

6. 某线性二进码的生成矩阵为：

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

求（1）用标准生成矩阵的形式表示 G。（2）计算该码的一致校验矩阵。（3）当输入序列为 1 1 0 1 0 1 1 0 1 0 1 0 时，求编码器输出的码序列。（15%）

解答：（1）按行作变换可得标准生成矩阵：

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{第3行加到第1行上}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第1行加到第3行上}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{第3行加到第1行上}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

（2）一致校验矩阵为：$\mathrm{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

（3）输入序列按 3 个符号一组进行编码，可知

110 -〉110 1001，

101 -〉101 0011，

101 -〉101 0011，

010 -〉010 0111

评分标准：该题为综合题，考查学生对线性分组码的标准生成矩阵、一致校验矩阵的掌握情况。写出标准生成阵得 5 分，写出标准一致校验矩阵得 5 分，写出编码器输出得 5 分

7. 一个四元对称信源$\begin{bmatrix} X \\ P(X) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$，接受符号$Y=\{0,1,2,3\}$，其失真矩阵

为$D=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$。求$D_{\max}$和$D_{\min}$，以及信源的$R(D)$函数。

解答：$D_{\max}=\min_j D_j=\min_j \sum_{i=1}^{4} p(a_i)d(a_i,b_j)=\frac{1}{4}\times 1+\frac{1}{4}\times 1+\frac{1}{4}\times 1+\frac{1}{4}\times 0=\frac{3}{4}$

$D_{\min}=\sum_{i=1}^{4} p(a_i)\min_j d(a_i,b_j)=\frac{1}{4}\times 0+\frac{1}{4}\times 0+\frac{1}{4}\times 0+\frac{1}{4}\times 0=0$

n 元等概率信源信息率失真函数为$R(D)=\ln n+\frac{D}{\alpha}\ln\frac{\frac{D}{\alpha}}{n-1}+(1-\frac{D}{\alpha})\ln(1-\frac{D}{\alpha})$

由题意知$\alpha=1,n=4$，所以

$R(D)=\ln 4+D\ln\frac{D}{3}+(1-D)\ln(1-D)$

<u>评分标准</u>：该题为基本题，考查学生对率失真函数的掌握情况。求出$D_{\max}$、$D_{\min}$、$R(D)$，各得 5 分；每问公式正确但计算结果错误，扣 1 分。